



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD PROFESIONAL “ADOLFO LÓPEZ MATEOS”

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y
ELÉCTRICA**

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**CÁLCULO DE PÉRDIDAS EN TANQUES DE TRANSFORMADORES
UTILIZANDO EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA**

PRESENTA

ING. MARCO ANTONIO VENEGAS VEGA

Cd. de México, Junio de 2007



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

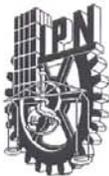
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA DE CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de México, Distrito Federal, el día 6 del mes de Junio del año 2007, el (la) que suscribe MARCO ANTONIO VENEGAS VEGA alumno(a) del Programa de MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA ELÉCTRICA con número de registro B 040957, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME unidad Zacatenco, manifiesta que es autor(a) intelectual del presente Trabajo de Tesis bajo la dirección del DR. RAFAEL ESCARELA PÉREZ y del DR. TADEUSZ NIEWIEROWICZ SWIECICKA y cede los derechos del trabajo titulado CÁLCULO DE PÉRDIDAS EN TANQUES DE TRANSFORMADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: Héroes de Chapultepec 301, Col. Centro, C.P 42800, Tula de Allende, Hidalgo. mvenegasvega@yahoo.com.mx si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Marco Antonio Venegas Vega



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 11:00 horas del día 25 del mes de Enero del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.M.E. ZAC para examinar la tesis de grado titulada:

“DETERMINACIÓN DE PÉRDIDAS EN TANQUES DE TRANSFORMADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO”

Presentada por el alumno:

VENEGAS

Apellido paterno

VEGA

materno

MARCO ANTONIO

nombre(s)

Con registro:

B	0	4	0	9	5	7
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Directores de tesis

Presidente

DR. TADEUSZ NIEWIEROWICZ SWIECICKA

DR. RAFAEL ESCARELA PÉREZ

DR. LESZEK KAWECKI ZLOTKOWSKA

Segundo Vocal

Tercer Vocal

DR. RAFAEL ESCARELA PÉREZ

DR. JOSÉ ÁNGEL LODEGARIO ORTEGA HERRERA

Secretario

Suplente

DR. DANIEL OLGUÍN SALINAS

M. EN C. TOMÁS IGNACIO ASIAÍN OLIVARES

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. JAIME ROBLES GARCÍA



Resumen

El modelado tradicional de transformadores en estado estable se realiza normalmente utilizando circuitos equivalentes (circuito T). Sin embargo, con el auxilio de computadoras digitales, el análisis puede hacerse mediante la solución directa de las ecuaciones de Maxwell; esto permite un estudio profundo de la distribución de los campos magnéticos producidos por las corrientes en todos los conductores del transformador (filamentarias y masivas). En el presente trabajo de tesis se estudian las ecuaciones en derivadas parciales, así como las condiciones de frontera que describen el comportamiento de un transformador de potencia trifásico; además se analizan varias formulaciones electromagnéticas en tres dimensiones para resolver el problema de corrientes de remolino de baja frecuencia. Dichas formulaciones, se detallan en términos de potenciales eléctricos y magnéticos, los cuales pueden ser escalares o vectoriales. La solución de las ecuaciones gobernantes se obtiene a través del Método del Elemento Finito. La determinación de pérdidas se realiza utilizando una formulación en el dominio de la frecuencia considerando que el transformador opera en estado estable. Se utiliza un modelo de elementos finitos en tres dimensiones acoplado a circuitos eléctricos externos (fuentes de voltaje e impedancias), lo cual precisa una solución simultánea de las ecuaciones de campo y de circuitos. El transformador se simula en condiciones de plena carga, circuito abierto y cortocircuito. Se pone especial interés al análisis del flujo magnético disperso para un apropiado estudio de las pérdidas producidas por las corrientes de remolino en partes estructurales del transformador (pérdidas stray). La simulación de la prueba de cortocircuito es sumamente importante debido a que en ella se muestran el efecto y la trayectoria del flujo disperso. Por otra parte, los volúmenes modelados de los conductores masivos con pequeñas profundidades de penetración demandan grandes recursos computacionales, ya que se requiere de elementos tridimensionales muy pequeños en estos volúmenes y en las zonas aledañas, por otra parte, la malla experimentaría cambios bruscos, generando importantes errores numéricos. Por lo anterior, es necesario emplear una formulación semi-analítica de impedancia de superficie para modelar las corrientes de remolino en dichas regiones delgadas tales como el tanque y los herrajes del transformador.

Abstract

The traditional modeling of transformers is usually carried out using simple (T-shaped) equivalent circuits. However, the analysis can be made by direct solution of Maxwell's equations with the aid of digital computers. This allows a deep study of the distribution of the magnetic field produced by the currents on filamentary and massive conductors of the transformer. Electromagnetic formulations in the form of partial differential equations, along with the required boundary conditions, are presented and formally derived in this thesis for the analysis of three-phase power transformers. The different electromagnetic formulations are analyzed in three dimensions to assess the problem of three-dimensional (3D) low-frequency eddy currents. These formulations are described in terms of electric and magnetic potentials, which can be of scalar or vector nature. The solution of the governing equations is obtained through the Finite Element Method. The numerical model is specifically employed for the determination of losses in the structural parts of the transformer (tank and frame). Only steady state operating conditions are considered, making possible the use of a time-harmonic/frequency domain approach. The 3D finite-element model is coupled to external electric circuits (voltage sources and impedances), which makes necessary the simultaneous solution of the field and circuit equations. The operating conditions simulated in this work are rated load, open circuit and short circuit conditions. The analysis of the transformer magnetic leakage fluxes takes relevance for proper understanding and calculation of structural/stray losses produced by eddy currents. The short-circuit test simulation reveals the effects and complex paths of the leakage fluxes, making this test a very important one. Volume modeling of massive conductors with small skin depths requires huge computer resources since very small 3D finite elements are required in these zones. This is not only making necessary a great deal of elements in conductor regions, but it is also requiring a bigger discretization in zones surrounding them. Otherwise, the mesh would suffer step changes that lead to big numerical errors. As a result, a semi-analytical formulation (known as surface impedance boundary condition) is used to model the eddy currents of regions with very small skin depth. With this technique, it is only necessary to represent the boundary surfaces of massive conductors.

***A Lioberth, a nuestra hija Mara Julieta
y a mi padre Manuel con todo cariño.***

Agradecimientos

Al concluir estos años de maestría, es mi deber detenerme un momento para valorar las contribuciones realizadas por las personas que me han rodeado durante todo este tiempo, y cuya labor también forma parte del trabajo aquí presentado.

Mi director de tesis y amigo, Dr. Rafael Escarela Pérez, tiene mi gratitud por haber demostrado, día a día durante cinco años, un interés constante en mi investigación, una habilidad para que el intercambio de ideas sea fluido y natural, y sobre todo, un ánimo incondicional que es inapreciable en esos momentos en los que uno mismo duda de la utilidad de su trabajo.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Tadeusz Niewierowicz Swiecicka por su tiempo y dedicación en la dirección de este trabajo de investigación, así como al M. en C. Eduardo Campero Littlewood por su apoyo y colaboración para llevar a feliz termino este trabajo

Manifiesto un especial agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Programa Institucional de Fomento a la Investigación del I.P.N. por el apoyo económico brindado durante mi estancia en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la E.S.I.M.E.

De la misma forma, agradezco a todos los profesores y compañeros del SEPI E.S.I.M.E. por su valioso apoyo para la realización de este trabajo, especialmente agradezco al Dr. Leszcek por su apoyo desinteresado y al Dr. Alfredo Reyes Rosario por los comentarios realizados a este trabajo. Al Dr. Juan Carlos Olivares Galván, Ing. Salvador Magdaleno y Ing. Ricardo Escutia por las valiosas aportaciones realizadas a ésta tesis.

Quisiera agradecer además a mi familia; a mi esposa Lioberth y a mi hija Mara por todo el apoyo y cariño que me han brindado en todo este tiempo el cual dedique para realizar mis estudios, a mi padre que siempre estuvo presente ayudándome en todo momento, así como a mis hermanos Mary, Manuel, Carlos, Pepe y Leonor, por todo los momentos difíciles y alegres que hemos pasado siempre juntos, así como cada uno de mis sobrinos.

Por último, he tenido la suerte de contar con los mejores compañeros y amigos durante mi estancia en la Universidad Autónoma Metropolitana y el Instituto Politécnico Nacional, la gente con la que puedes desahogarte y compartir pesares y satisfacciones. Sin enumerar a todos quiero dar las gracias a Emmanuel García, Octavio Hernández, Teofilo Miranda, Irvin López, Omar Aquino, Enrique López y a Mario Alberto García.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	i
Abstract	ii
Agradecimientos	iii
Índice General	v
Lista de Símbolos	vii
Índice de Figuras	x
Índice de Tablas	xi

1 Introducción

1.1 Descripción del problema.....	1
1.2 Justificación.....	2
1.3 Objetivos.....	3
1.4 Antecedentes.....	3
1.5 Aportaciones.....	4
1.6 Alcance y limitaciones.....	5
1.5 Estructura de la tesis.....	5
1.6 Aportaciones.....	5

2 Pérdidas en Transformadores

2.1 Conceptos Básico.....	7
2.3 Determinación de los valores de los parámetros en el modelo de transformador.....	8
2.3.1 Perdidas en vacío y corriente de excitación.....	9
2.3.2 Perdidas de carga y voltaje de impedancia.....	10

3 Formulación Electromagnética de las Corrientes de Remolino

3.1 Introducción.....	11
3.2 Solución analítica en una placa conductora semi infinita.....	12
3.3 Vector de Poynting.....	16
3.4 Corrientes de remolino en tres dimensiones.....	21
3.5 Formulaciones del problema.....	22
3.5.1 Formulación \mathbf{A} , $V\text{-}\mathbf{A}$	22
3.6.2 Formulación \mathbf{A} , $V\text{-}\mathbf{A}$	23
3.7.3 Formulación \mathbf{A} , $V\text{-}\mathbf{A}$ - Ψ	25

4 Método del Elemento Finito aplicado a las Corrientes de Remolino

4.1 Introducción.....	27
4.2 Conceptos generales.....	27
4.3 Elementos nodales tridimensionales.....	29
4.3 Realización del elementos finitos.....	29

4.4	Modelado de las bobinas.....	32
4.4	Circuitos eléctricos externos acoplados a modelos de elementos finitos.....	33
4.5	Impedancia de superficie.....	34
4.6	Construcción de un modelo de elementos finitos.....	35
4.7	Etapas para el cálculo con computadora.....	36
5 Modelo 3D de Elementos Finitos		
5.1	Características del transformador.....	38
5.2	Creación de la malla de elementos finitos.....	40
6 Resultados		
6.1	Prueba de Circuito Abierto.....	42
6.1.1	Pérdidas en el núcleo del transformador.....	48
6.2	Prueba de Corto circuito	50
6.2.1	Pérdidas de carga en el transformador.....	56
6.3	Transformador a plena carga.....	59
7 Conclusiones.....		63
8 Referencias.....		65
Apéndice A		
El transformador.....		68
Apéndice B		
Construcción de la malla de elementos finitos en tres dimensiones.....		78

LISTA DE SIMBOLOS

A	Potencial Magnético Vectorial
a	Vector columna que contiene los valores nodales de los potenciales
dΓ	Elemento infinitesimal de superficie
dΩ	Elemento infinitesimal de volumen
B	Densidad de Campo Magnético
B₁	Densidad de Campo Magnético del lado de la superficie 1
B₂	Densidad de Campo Magnético del lado de la superficie 2
E	Intensidad de Campo Eléctrico
f	Vector fuente que contiene los términos de lado derecho del sistema de ecuaciones
H	Intensidad de Campo Magnético
H₁	Intensidad de Campo Magnético del lado de la superficie 1
H₂	Intensidad de Campo Magnético del lado de la superficie 2
H_s	Intensidad de Campo Magnético producido por una corriente en el espacio
I	Corriente por unidad de longitud
I_{cap}	Corriente en un capacitor
Im	parte imaginaria de un vector
J	Densidad de Corriente
j	Número imaginario $\sqrt{-1}$
J_s	Densidad de corriente en una superficie
n1	Vector normal unitario a la superficie 1
n2	Vector normal unitario a la superficie 2
N_i	Función de forma correspondiente al nodo i
S	Matriz en donde se colectan los términos que multiplican a los potenciales
T	Potencial Eléctrico Vectorial
U	Matriz en donde se colectan los términos que multiplican a las derivadas de los potenciales
V	Potencial Eléctrico Escalar

V_A, V_B	Voltaje en los nodos A y B respectivamente.
V_{cap}	Voltaje en terminales de un capacitor
V_0	Voltaje inicial en terminales de un capacitor
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	Vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesiano
Γ_1	Frontera de la región conductora
Γ_2	Frontera de la región no conductora
Γ_{12}	Interfase entre regiones conductora y no conductora
Γ_B	Frontera en donde la densidad de campo magnética es paralela
Γ_{B1}	Parte de Γ_B perteneciente a la región conductora
Γ_{B2}	Parte de Γ_B perteneciente a la región no conductora
Γ_H	Frontera en donde la intensidad de campo magnética es perpendicular
Γ_{H1}	Parte de Γ_H perteneciente a la región conductora
Γ_{H2}	Parte de Γ_H perteneciente a la región no conductora
δ	Profundidad de penetración
μ	Permeabilidad magnética
μ_0	Permeabilidad magnética en el vacío
μ_1, μ_2	Permeabilidad magnética en los lados 1 y 2 respectivamente
ν	Reluctividad
Ψ	Potencial Magnético Escalar Reducido
ϕ	Potencial Magnético Escalar Total
Ω_1	Región de corrientes de remolino
Ω_2	Región sin corrientes de remolino
σ	Conductividad
τ	Densidad de vueltas en una bobina filamentaria
ω	Frecuencia Angular

Subíndices.

<i>i</i>	Subíndice que denota un nodo.
<i>im</i>	Subíndice que denota la componente imaginaria,
<i>n</i>	Subíndice que denota una componente normal.
<i>re</i>	Subíndice que denota la componente real.
<i>t</i>	Subíndice que denota una componente normal.
<i>x,y,z</i>	Subíndice que denota las componentes cartesianas de un vector.

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 2.1 Circuito equivalente del transformador real.....	8
Fig.2.2 Circuito equivalente del transformador real referido al lado primario.....	8
Fig.2.3 Diagrama de conexión para el ensayo de pérdidas en vacío y de corriente de excitación.....	9
Fig.2.4 Diagrama de conexión para el ensayo de pérdidas de carga y voltaje de impedancia.....	10
Fig. 3.1 Penetración de campo dentro de un conductor.....	19
Fig. 3.2. Regiones, secciones de frontera e interfases en un problema típico de corrientes de remolino	21
Fig. 3.3. Regiones, secciones de frontera e interfases en un problema de corrientes de remolino con la región conductora múltiplemente conectada.....	25
Fig. 4.1 Discretización de un dominio.....	28
Fig. 4.2 Modelo de elementos finitos acoplados a circuitos eléctricos.....	33
Fig. 4.3 Esquema proceso de cálculo mediante computadora.....	37
Fig. 5.1 Partes principales de un transformador trifásico de 31.5MVA.	38
Fig. 5.2. Geometría del transformador.....	39
Fig. 5.3 Metodología empleada para modelar el transformador trifásico.	41
Fig. 6.1. Conexión de los devanados cuando el transformador opera en circuito abierto.....	43
Fig 6.2 Representación fasorial de las corrientes y voltajes en el ensayo de vacío...	44
Fig. 6.3. Distribución del campo magnético durante la prueba de circuito abierto $\omega t=270^\circ$	45
Fig. 6.4. Distribución del campo magnético durante la prueba de circuito abierto $\omega t=30^\circ$	46
Fig. 6.5. Distribución del campo magnético durante la prueba de circuito abierto $\omega t=150^\circ$	47
Fig. 6.6. Curva de pérdidas para una lámina de acero al silicio M-2	48
Fig. 6.7. Conexión de los devanados cuando el transformador opera en circuito abierto	50
Fig. 6.8. Distribución del campo magnético durante la prueba de cortocircuito $\omega t=0^\circ$	51
Fig. 6.9. Distribución del campo magnético durante la prueba de cortocircuito $\omega t=120^\circ$	52
Fig. 6.10. Distribución del campo magnético durante la prueba de cortocircuito $\omega t=240^\circ$	53
Fig. 6.11. Distribución de las pérdidas en el tanque y en el marco durante la prueba de cortocircuito.....	54
Fig 6.12 Representación fasorial de las corrientes y voltajes en el ensayo de cortocircuito.....	55
Fig. 6.13. Conexión de los devanados cuando el transformador opera a plena carga.....	59
Fig 6.14 Representación fasorial de las corrientes y voltajes cuando el transformador opera a plena carga.....	60
Fig. 6.15. Distribución del campo magnético a plena carga $\omega t=90^\circ$	61

Fig. 6.16. Distribución del campo magnético a plena carga $\omega t=30^\circ$	62
Fig. 6.17. Distribución del campo magnético a plena carga $\omega t=150^\circ$	63

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla I. Voltajes y corrientes durante la prueba de circuito abierto.....	44
Tabla II. Magnitud y ángulo de voltajes y corrientes durante la prueba de cortocircuito.....	54
Tabla III. Potencia real suministrada por las fuentes y pérdidas en los devanados del transformador.....	55
Tabla IV. Pérdidas por corrientes de remolino en partes estructurales.....	55
Tabla V. Corrientes en los devanados y en la carga cuando opera el transformador a plena carga.....	58
Tabla VI. Voltajes en los devanados y en la carga cuando opera el transformador a plena carga.....	58
Tabla VII. Pérdidas por corrientes de remolino en partes estructurales a plena carga.....	59

INTRODUCCIÓN

1.1 Descripción del problema

El uso casi universal del sistema de corriente alterna para la transmisión y distribución de energía eléctrica se debe al hecho de que circuitos de diferentes tensiones se pueden interconectar mediante un dispositivo eficaz y confiable: el transformador. Los progresos en la transmisión y distribución de energía, no hubieran sido posibles sin las características únicas del transformador que le permiten adaptarse a los requerimientos individuales de las diferentes partes de un sistema, sin importar la magnitud de la carga [1].

Los transformadores son usualmente representados por circuitos eléctricos. El conocimiento de los diferentes parámetros del circuito equivalente permite conocer el funcionamiento de la máquina bajo diferentes condiciones de operación [2]. Aunque se conoce el funcionamiento electromagnético del transformador con claridad, hasta hace poco no existían las herramientas necesarias para calcular de manera precisa los parámetros eléctricos y magnéticos existentes dentro del transformador, así como las pérdidas producidas por corrientes inducidas en partes estructurales, tales como los marcos o herrajes que sujetan al núcleo y el tanque del transformador.

Con el desarrollo de los métodos numéricos y el avance de las computadoras como herramientas de cálculo y de simulación, se ha hecho posible el estudio de transformadores en términos de sus variables electromagnéticas. El Método del Elemento Finito [3] se utiliza actualmente de manera rutinaria para resolver problemas de ingeniería eléctrica de baja frecuencia. A lo largo de tres décadas este método se ha utilizado en la solución de problemas electromagnéticos y a través del tiempo se han desarrollado un número considerable de programas computacionales que resuelven estos problemas, los cuales en su mayoría no tienen solución analítica o requieren de muchas aproximaciones para obtener una. En la actualidad el ingeniero de diseño de máquinas eléctricas debe conocer esta herramienta para mejorar los diseños de motores, transformadores, interruptores de potencia, etc., para los cuales la distribución de campo magnético, el potencial eléctrico, y otros parámetros forman parte importante de la información necesaria para poder construir máquinas más eficientes a menor costo [4-6].

Por otra parte, el cálculo de las pérdidas en los transformadores ha sido siempre un tema de interés en el sector industrial, mas que nada para quienes tienen a su cargo el diseño de éstas máquinas y para quienes las operan, con el fin de obtener de ellos siempre la

mayor eficiencia en el momento de su funcionamiento bajo determinadas condiciones [1].

Las corrientes en los conductores de los devanados de transformadores provocan en las partes estructurales (tanque, el núcleo y los marcos o herrajes que sujetan al conjunto de núcleo y devanados) un campo magnético que es variante en el tiempo. Debido a las propiedades conductoras del material del que están elaboradas dichas partes, se inducen corrientes de remolino, las cuales provocan calentamiento debido al efecto Joule [7]. El sobrecalentamiento en la pared del tanque es propiciado por corrientes inducidas en el medio conductor, estas corrientes son producidas por campos magnéticos que, como se sabe varían con el tiempo, ya que en los conductores del transformador se tienen corrientes alternas [8].

El presente trabajo surge como resultado del estudio y análisis que han desarrollado los profesores investigadores que lo asesoraron. Dicha investigación se ha enfocado principalmente en el empleo de modelos bidimensionales y tridimensionales de elementos finitos para determinar zonas calientes en transformadores de potencia [8, 13].

En esta tesis, se muestra un estudio de las pérdidas en partes estructurales de un transformador de potencia trifásico producidas por las corrientes de remolino. Se analiza entre otras cosas el flujo disperso producido durante la prueba de carga y voltaje de impedancia del transformador [14]. Se emplea un modelo de elementos finitos en tres dimensiones acoplado a circuitos eléctricos – fuentes de voltaje trifásicas y resistencias. Las corrientes de remolino en partes estructurales son calculadas empleando un análisis armónico en condiciones de cortocircuito. Los herrajes y el tanque del transformador se modelan empleando el método de impedancia de superficie para reducir tiempos de cómputo e imprecisiones numéricas.

1.2 Justificación

Las corrientes de remolino de baja frecuencia constituyen un caso especial del problema electromagnético, en el cual la corriente de desplazamiento se desprecia [7]. Las corrientes de remolino se inducen en regiones conductoras debido a la variación del campo magnético. Así, las corrientes de remolino aparecen en partes estructurales de máquinas eléctricas (conductores masivos). Algunas veces las corrientes de remolino son benéficas como en el caso de un horno de inducción. En otros casos, su presencia es indeseable, como en dispositivos donde partes metálicas se encuentran dentro de un campo magnético variable y estas corrientes provocan pérdidas de potencia por efecto Joule. Dichas pérdidas causan zonas calientes las cuales afectan la seguridad y la eficiencia de las máquinas eléctricas, así como costos más altos de operación. Es de vital importancia para el ingeniero de diseño el conocimiento y la estimación de todas las pérdidas producidas por las corrientes de remolino ya que cada kW de pérdida puede ser capitalizado por los usuarios en costos que van desde los US\$750 hasta los US\$2500. En transformadores de potencia, una reducción de estas pérdidas en un 3 a un 5 kW puede ser una ventaja competitiva en la compañías dedicadas a la fabricación de estos transformadores [1].

1.3 Objetivos

1. Estudiar las diferentes formulaciones electromagnéticas para resolver el problema de corrientes de remolino en zonas conductoras empleando el Método del Elemento Finito.
2. Determinar las pérdidas debido a las corrientes de remolino generadas en el tanque y en los herrajes de un transformador de potencia trifásico tipo núcleo utilizando el método del elemento finito.
3. Acoplar circuitos eléctricos al modelo de elementos finitos con el fin de realizar conexiones entre los devanados del transformador y poder alimentar dichos devanados a una fuente trifásica.
4. Emplear un modelo de impedancias de superficie para modelar regiones conductoras delgadas.

1.4 Antecedentes

En la realización de esta tesis primero se discuten varias formulaciones electromagnéticas para modelar corrientes de remolino de baja frecuencia, inducidas en regiones conductoras de transformadores. El cómputo de las corrientes de remolino y los campos magnéticos que las producen, ha sido objeto de intenso estudio, lo que ha resultado en varias formulaciones para la solución numérica del problema de las corrientes de remolino [15-22]. Una aproximación que es encontrada frecuentemente emplea el potencial magnético vectorial para describir el campo magnético en las regiones conductoras. Otra formulación emplea la definición de nuevos potenciales escalares para obtener el campo eléctrico en regiones conductoras y el campo magnético en las no conductoras. Para determinar los potenciales, las ecuaciones diferenciales obtenidas de las ecuaciones de Maxwell son resueltas numéricamente. Esquemas numéricos efectivos para este último caso se basan en el Método del Elemento Finito. Una de las primeras formulaciones desarrolladas fue presentada por Chari, [15], la cual propone el uso del potencial magnético vectorial y el potencial eléctrico escalar para regiones conductoras y no conductoras. Una formulación similar la presentaron Renhart, Stoegner y Preis en [16].

El empleo del potencial magnético escalar en las regiones no conductoras y la eliminación del potencial eléctrico escalar, resulta en la formulación propuesta por Rodger y Eastham [17] la cual lleva una reducción substancial del costo computacional, debido al decremento de los grados de libertad por nodo de los elementos finitos definidos en las regiones no conductoras (de tres a uno y en conductores de cuatro a tres). La versión en la que el potencial eléctrico escalar se descarta, se le conoce como aproximación del potencial modificado vectorial, misma que ha sido implementada en códigos de computadora y la solución ha sido reportada para resolver problemas prácticos [18]. A pesar de estas notables ventajas, esta formulación presenta algunas dificultades, tales como la que se refiere al caso de cero frecuencia (esto es, campo magnético estacionario) donde el potencial magnético vectorial deja de ser único resultando en dificultades numéricas. Kameari [19] ha reportado la inclusión del potencial eléctrico escalar en conductores para resolver este problema. Esto remueve la

unicidad del potencial magnético vectorial, facilitando la solución de las ecuaciones algebraicas que resultan de utilizar el Método del Elemento Finito. Finalmente, el uso del potencial magnético escalar en regiones no conductoras introduce complicaciones si los conductores no son simplemente conectados. Kameari [19] propone también el uso de cortes y de brincos en zonas no conductoras para resolver esta dificultad. Rodger y Eastham investigaron varias soluciones para este problema en [20] y finalmente, Leonard y Rodger [21] proponen en las regiones conductoras el uso del potencial magnético vectorial, y simultáneamente, introducen el potencial eléctrico escalar en regiones no conductores. Esta formulación, sin embargo, también resulta en una ruptura de la unicidad (*no unicidad*) del potencial magnético vectorial, lo cual involucra dificultades numéricas. Biró en [22] establece las condiciones bajo las cuales el potencial magnético vectorial es único para llegar a formulaciones y esquemas numéricos que resuelven las dificultades arriba señaladas.

La predicción del fenómeno electromagnético en las partes estructurales metálicas en transformadores es un importante paso en el proceso de diseño para controlar sobrecalentamientos locales provocados por el flujo magnético disperso. Al paso de los años, el problema ha sido tratado por varios autores [8-11],[23-29], principalmente analizando las pérdidas en el tanque de los transformadores. Las pérdidas ocasionadas por las corrientes de remolino y, por consiguiente las zonas calientes en partes estructurales en transformadores, se concentran en las regiones cercanas a los conductores de baja tensión, que son los que llevan mayor corriente. Los autores en [23-24] tratan el problema de las pérdidas en las partes cercanas a los conductores de un transformador así como en la tesis [9]. Por otra parte en [26-28] tratan el problema de las pérdidas producidas por las corrientes de remolino en los herrajes que sujetan al núcleo y al tanque debidas a flujo disperso utilizando el potencial eléctrico vectorial T y el potencial magnético escalar Ψ .

Los trabajos [9-10] comparan simulaciones en dos y tres dimensiones para el cálculo de pérdidas producidas en la pared frontal en transformadores de distribución tipo pedestal. Los resultados que arrojan las simulaciones en dos dimensiones distan de los valores obtenidos en el laboratorio, debido a que en el análisis bidimensional se asume que la corriente circula en una sola dirección, lo cual significa que el campo magnético asociado está confinado en un solo plano y por tanto, solo habrá una componente del potencial magnético vectorial. Este tipo de condiciones son las que aparecen al asumir que las regiones en donde se inducen las corrientes de remolino son de espesor infinito. Lo que ocurre en realidad es que éstas regiones son muy delgadas comparadas con las dimensiones de alto y ancho, por lo que las corrientes de remolino inducidas tienen componentes que fluyen perpendicularmente al plano donde se encuentran dichas regiones contribuyendo también a las pérdidas. Es aquí donde surge el principal problema del análisis bidimensional, ya que este no toma en cuenta el fenómeno que ocurre con las corrientes de remolino, de esto último surge la necesidad de tener un modelo en tres dimensiones que sea capaz de cuantificar las pérdidas ocasionadas por las corrientes de remolino.

1.5 Aportaciones

- Aplicación de un modelo de elementos finitos en tres dimensiones, que utiliza una formulación semi-analítica para determinar la distribución de pérdidas en tanques de transformadores de potencia, producida por el flujo magnético de dispersión. Las pérdidas no se pueden distinguir de las totales de forma experimental.
- La excitación en los devanados del transformador se realizó mediante fuentes externas de voltaje. El modelo considera las ecuaciones de campo y las de circuito de manera simultánea. En otros modelos de elementos finitos de baja frecuencia normalmente se inyecta corriente en los nodos respectivos.
- El modelo incorpora las conexiones externas de los dispositivos eléctricos conectados a los devanados de los transformadores, lográndose de esta manera una representación del transformador con carga nominal, así como la simulación de las pruebas de cortocircuito y circuito abierto en el transformador.

1.6 Alcance y limitaciones

En esta tesis se estudian las pérdidas en el tanque de un transformador de potencia, el cual se simula usando un modelo de elementos finitos tridimensional, con el que se pueden visualizar los campos magnéticos, así como la densidad de corriente inducida en las partes conductoras. Se utiliza un análisis armónico de baja frecuencia en las simulaciones lo que permite calcular las corrientes inducidas en la estructura metálica del dispositivo electromagnético.

Al final de este trabajo se puede afirmar que se ha dado una metodología completa para obtener las pérdidas en tanques de transformadores. El estudio considera modelos en tres dimensiones para analizar el problema de las corrientes de remolino inducidas en los herrajes y el tanque del transformador de potencia, además es posible incorporar circuitos eléctricos al modelo de elementos finitos con el fin de realizar conexiones en los devanados, así como suministrar energía al transformador por medio de una fuente trifásica de voltaje.

Es importante hacer notar que las pérdidas ocasionadas por las corrientes de remolino y las producidas por el efecto de histéresis en el núcleo, no son contempladas en el modelo de elementos finitos. En el modelo empleado tampoco se incorpora de forma directa las laminaciones del núcleo con que se fabrica, aunque el núcleo se aproxima con una permeabilidad equivalente.

1.7 Estructura de la tesis

Este documento se encuentra organizado en 7 capítulos. En el primero se presentan la introducción, los objetivos, la justificación, el alcance, limitaciones de la tesis y las aportaciones. El segundo comprende la base teórica relativa a las pérdidas en

transformadores. En el tercer capítulo se exponen distintos aspectos acerca de las formulaciones electromagnéticas aplicadas al estudio de corrientes de remolino y que se emplean en programa de elementos finitos. El concepto de elementos finitos, circuitos eléctricos acoplados e impedancias de superficies que se utilizan para su implementación se abordan en el cuarto capítulo; en el quinto capítulo se presenta el modelo de elementos finitos en tres dimensiones y las conexiones empleadas para llevar a cabo los ensayos de pérdidas de carga, circuito abierto y la operación a plena carga. En el sexto capítulo se presenta los resultados arrojados por el modelo tridimensional. Finalmente las conclusiones se exponen en el séptimo capítulo.

PÉRDIDAS EN TRANSFORMADORES

Los transformadores pueden ser en general máquinas monofásicas o trifásica fijas (no rotativas) que transforman los niveles de tensión en valores superiores (elevadores) o inferiores (reductores) de tensión según lo requiera el sistema industrial. Los conceptos básicos de transformadores se describen en el Apéndice A, en este capítulo se analizan solamente las pérdidas que se generan en estos dispositivos. Estos aparatos de potencia son las máquinas eléctricas de mayor eficiencia, ya que esta puede alcanzar hasta un 95%; sin embargo es importante el estudio del 5% restante, el cual se reparte en las diferentes pérdidas que se producen en el transformador [30]. Las pérdidas de potencia que ocurren en los transformadores son:

1. Pérdidas en el cobre (I^2R): Las pérdidas en el cobre corresponden a la energía que es disipada por las resistencias de las bobinas primaria y secundaria del transformador. Dichas pérdidas son proporcionales al cuadrado de la corriente que circula por dichas bobinas.
2. Pérdidas por corrientes de remolino: Las pérdidas por corrientes de remolino son pérdidas producidas por la resistencia eléctrica del núcleo del transformador y en partes estructurales (también llamadas pérdidas *stray*). Éstas son proporcionales a la frecuencia y al cuadrado del voltaje aplicado al transformador [1].
3. Pérdidas por histéresis: Las pérdidas por histéresis están asociadas con los reajustes de los dominios magnéticos en el núcleo cada medio ciclo. Ellos son una función compleja, no lineal, del voltaje aplicado al transformador.

Es posible construir un circuito equivalente considerando las resistencias e inductancias de los devanados primarios y secundarios, además de los efectos que tiene el núcleo sobre los voltajes y corrientes del transformador, en la figura 2.1 se muestra el circuito equivalente T para un transformador que opera en estado estable [1].

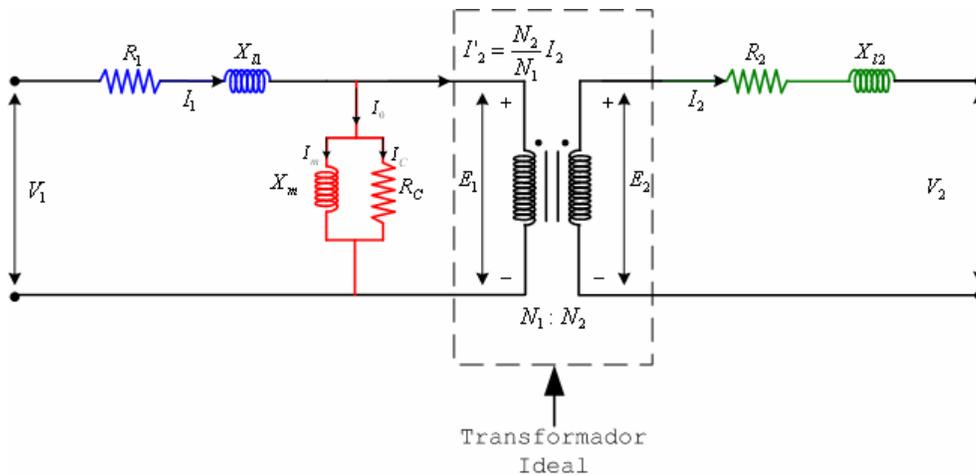


Fig. 2.1 Circuito equivalente del Transformador Real.

Para poder trabajar con el circuito de la figura 2.1, es conveniente referir todos los parámetros (impedancias) del transformador a un mismo nivel de tensión. Esto se puede hacer con respecto al primario o bien con respecto al secundario. En el circuito de la figura 2.2 se muestra el circuito equivalente de un transformador real referido al lado primario del mismo. Es necesario observar que la impedancia del secundario fue multiplicada por la razón de transformación al cuadrado.

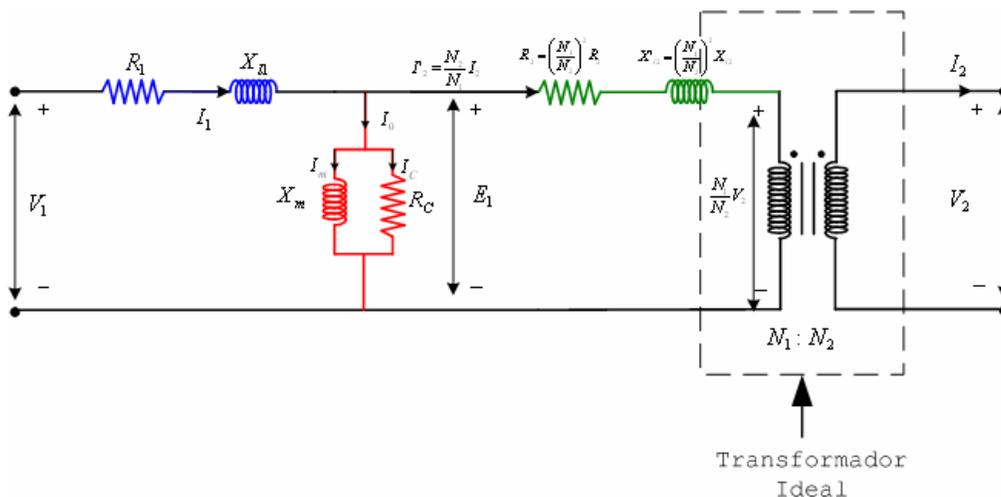


Fig.2.2 Circuito equivalente del Transformador Real referido al lado primario.

2.2 Determinación de los valores de los parámetros en el modelo del transformador.

Es posible determinar experimentalmente los valores de las inductancias y resistencias en el modelo de transformador. Una aproximación adecuada de estos valores se puede obtener con dos ensayos solamente: el ensayo de circuito abierto (Perdidas en vacío y corriente de excitación.) y el ensayo de corto circuito (Perdidas en carga tensión y impedancia) [14]

2.2.1 Pérdidas en vacío y corriente de excitación.

Las pérdidas de un transformador incluyen las pérdidas en vacío (pérdidas en el núcleo) y las pérdidas en carga (pérdidas por resistencia, pérdidas por corrientes de remolino en los devanados y en partes estructurales).

Las pérdidas en vacío constan de pérdidas por histéresis y por corrientes de remolino en el núcleo. Además, existen unas pequeñas pérdidas por la resistencia en el devanado debido a la corriente de excitación, pero éstas son despreciables. Para las ondas de tensión reales, que sólo contienen armónicos impares, el valor máximo del flujo se determina por el valor medio de la tensión. Por lo tanto, las pérdidas por histéresis no dependen del valor eficaz de la tensión, sino de su valor medio. Las pérdidas por corrientes de remolino, por otra parte, dependen del valor eficaz de la tensión. Para una onda senoidal pura el valor eficaz es 1,11 veces el valor medio. Así, si las pérdidas del núcleo se miden usando una onda senoidal pura de tensión o una tensión cuyo valor eficaz sea 1,11 veces el valor medio, debe aplicarse al transformador la tensión eficaz nominal. Si la relación entre tensión eficaz y tensión media no es 1,11, debería ajustarse apropiadamente la tensión aplicada usando una corrección empírica. Las medidas de las pérdidas en el núcleo requieren el uso de un voltímetro de tensión media, además de un voltímetro de tensión eficaz [14].

En la figura 2.3 se muestra el diagrama de conexión para el ensayo de pérdidas en vacío y de corriente de excitación. Para este ensayo puede usarse tanto el devanado de alta tensión como el de baja tensión del transformador aplicando la tensión nominal de este devanado, pero en general resulta más conveniente usar el devanado de baja tensión. En cualquier caso, si es posible, debe usarse un devanado completo. Si por cualquier razón especial se usa sólo una parte de un devanado, esta porción no debe ser menor del 25% del devanado total. Hay que aplicar la potencia a la frecuencia nominal y ajustar la tensión al valor deseado. Debe restringirse la frecuencia, la tensión media, la tensión eficaz, la potencia y la corriente, haciendo las correcciones adecuadas relativas a los transformadores y a los instrumentos de medida [1,14].

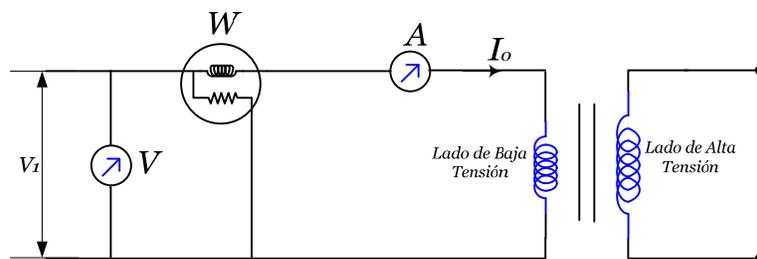


Fig.2.3 Diagrama de conexión para el ensayo de pérdidas en vacío y de corriente de excitación

2.2.2 Pérdidas de carga y voltaje de impedancia

Las pérdidas en carga son las pérdidas que aparecen debido a la circulación de la corriente de carga. Incluyen las pérdidas por resistencia así como las pérdidas por corrientes de remolino en los devanados y conexiones. También se incluye aquí las pérdidas adicionales en los devanados, las abrazaderas del núcleo, el tanque, etc., causadas por flujos dispersos; y las pérdidas debidas a las corrientes circulatorias, si las hay, en los devanados en paralelo.

El voltaje de impedancia de un transformador es la tensión necesaria para hacer circular la corriente nominal a través de un devanado del transformador cuando el otro devanado está cortocircuitado (figura 2.4). Normalmente se expresa como porcentaje de la tensión nominal del devanado; comprende una componente de resistencia correspondiente a las pérdidas de carga y una componente de reactancia correspondiente a los flujos de dispersión concatenados con los devanados. Las medidas de las pérdidas en carga y de la tensión de impedancia pueden hacerse simultáneamente. Uno de los devanados del transformador se cortocircuita, mientras que al otro se le aplica una tensión a frecuencia nominal que se ajusta a fin de que circulen las corrientes nominales por los devanados (figura 2.6). Una vez ajustada la corriente y la frecuencia a los valores nominales, se toman lecturas del amperímetro, voltímetro, wattmetro y frecuencímetro y se hacen las correcciones adecuadas relativas a los transformadores y aparatos de medida. [1,13].

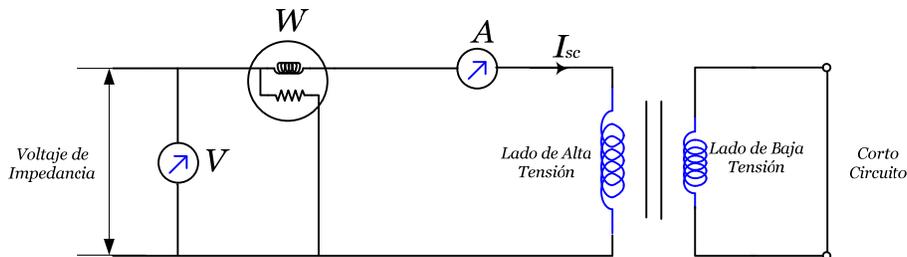


Fig.2.4 Diagrama de conexión para el ensayo de pérdidas de carga y voltaje de impedancia

FORMULACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

3.1 Introducción

Las corrientes de remolino inducidas en materiales conductores son provocadas por un campo magnético externo que es variante en el tiempo. De la Ley de Faraday se sabe que la variación del flujo magnético puede generar un voltaje (y eventualmente una corriente) en un circuito secundario. De la misma forma, las corrientes circundantes, llamadas corrientes de remolino, se originan en las piezas voluminosas de metal que se encuentran dentro de un campo variante en el tiempo o que se mueven y cruzan un campo magnético constante [7].

Las ecuaciones de Maxwell, que gobiernan en su totalidad los fenómenos electromagnéticos son [4]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.4)$$

donde

- H** Intensidad de campo magnético (A/m)
- J** Densidad de corriente (A/m²)
- B** Densidad de campo magnético (Wb/m²)
- E** Intensidad de campo eléctrico (V/m)
- D** Densidad de campo eléctrico (C/m²)
- ρ** Densidad volumétrica de carga (C/m³)

Las ecuaciones (3.5) a (3.7) son las relaciones constitutivas que ayudan a incorporar las propiedades de los materiales con los que se construye cualquier dispositivo electromagnético. Así:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (3.7)$$

μ Permeabilidad del material (H/m)

ε Permitividad del material (F/m)

σ Conductividad (mhos/m)

La relación entre la corriente de conducción (\mathbf{J}) y la corriente de desplazamiento ($\partial\mathbf{D}/\partial t$) esta dada por la relación $\sigma/(j\omega\varepsilon)$, la cual es muy grande a muy altas frecuencias aun en regiones pobremente conductoras (ω es la frecuencia en rad/seg). Para el análisis de corrientes de remolino a bajas frecuencias, la corriente de desplazamiento se desprecia en regiones conductoras [31]. De esto se desprende entonces la ecuación (3.2) se puede simplificar como:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.8)$$

3.2 Solución analítica en una placa conductora semi-infinita

Para obtener un solución analítica, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (3.1) y (3.8) que involucran los campos magnético \mathbf{H} y eléctrico \mathbf{E} , son combinadas para dar una sola ecuación diferencial en derivadas parciales. Si se aplica el rotacional a la ecuación (3.8) y se utiliza la ecuación constitutiva (3.6), se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \sigma\mathbf{E} \quad (3.9)$$

Para un valor constante de conductividad (σ), la ecuación se puede simplificar utilizando algebra vectorial como;

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \nabla \times \mathbf{E} \quad (3.10)$$

Si se emplea ahora la relación constitutiva (3.5) para una material con características magnéticas lineales (μ constante), para reescribir la ecuación (3.3) como:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mu\mathbf{H} = \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.11)$$

De la ecuación anterior se puede observar que

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.12)$$

Ahora se emplea las ecuaciones (3.1) y (3.12) para reescribir la ecuación (3.10):

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.13)$$

o

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) es conocida como *Ecuación de Difusión* [32]. Ahora, en el dominio de la frecuencia, la ecuación (3.1) se puede reescribir como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (3.14)$$

En la ecuación anterior, el término $j\omega$ aparece debido a que la derivada parcial con respecto al tiempo de una onda senoidal es equivalente a multiplicar el fasor correspondiente por $j\omega$. Se emplea ahora la ecuación constitutiva (3.5) para obtener:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \quad (3.15)$$

Si se aplica el rotacional a ambos términos de la ecuación anterior:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \nabla \times \mathbf{H} \quad (3.16)$$

Ahora se utiliza la ecuación (3.8) para obtener:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{J} \quad (3.17)$$

Los siguientes pasos son similares a los que se utilizan para obtener la *Ecuación de Difusión* (3.13) y empleando el hecho que $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0$ ya que no se presentan cargas eléctricas libres [31], se tiene que:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{E} - j\omega \mu \mathbf{J} \quad (3.18)$$

Sustituyendo ahora el valor de \mathbf{J} en la ecuación anterior se tiene que:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = j\omega \mu \sigma \mathbf{E} \quad (3.19)$$

Ahora, se asume que el campo vectorial \mathbf{E} tiene una sólo componente a lo largo del eje x

$$\nabla_x^2 E_x = j\omega \mu \sigma E_x \quad (3.20)$$

La expansión del operador ∇^2 conduce a la ecuación en derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 z} = j\omega\mu\sigma E_x \quad (3.21)$$

Si ahora se asume que el campo eléctrico no varía a lo largo de los ejes x y y , esto es; el campo E_x es una función solamente de z , entonces:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 z} = j\omega\mu\sigma E_x \quad (3.22)$$

Se puede escribir la solución de (3.22) como:

$$E_x = E_{xp} e^{-\gamma z} + E_{xp} e^{+\gamma z} \quad (3.23)$$

Donde E_{xp} es un factor de amplitud y γ es la constante de propagación, la cual puede expresarse en términos de la constante de atenuación α y la constante de fase β como:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (3.24)$$

Si se substituye el valor de E_x de la ecuación (3.23) en la ecuación (3.22) se obtiene lo siguiente:

$$E_{xp} \gamma^2 e^{-\gamma z} + E_{xp} \gamma^2 e^{+\gamma z} = j\omega\mu\sigma (E_{xp} e^{-\gamma z} + E_{xp} e^{+\gamma z}) \quad (3.23)$$

en donde

$$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma \quad (3.24)$$

por lo tanto

$$\gamma = \pm \sqrt{j\omega\mu\sigma} \quad (3.25)$$

Si el campo E_x es incidente a una superficie de un conductor ($z=0$) y se atenúa dentro del conductor ($z>0$), solamente se puede utilizar un signo para γ (el cual es consistente para el caso considerado) [33]:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \times \sqrt{1\angle 90^\circ} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \times 1\angle 45^\circ = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (3.26)$$

Substituyendo $\omega=2\pi f$ se obtiene:

$$\gamma = (1 + j)\sqrt{2\pi f\mu\sigma} \quad (3.27)$$

De la ecuación anterior resulta:

$$\alpha = \beta = \sqrt{2\pi f\mu\sigma} \quad (3.28)$$

Si se supone nuevamente que sólo existe la componente E_x , que viaja en la dirección $+z$, entonces el campo eléctrico se puede expresar ahora en su forma exponencial como:

$$E_x = E_{xp} e^{-\gamma z} \quad (3.29)$$

La ecuación anterior se puede escribir en el dominio del tiempo como:

$$E_x = E_{xp} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (3.30)$$

Al substituir los valores de α y β de la ecuación (3.28) se tiene:

$$E_x = E_{xp} e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \quad (3.31)$$

Se puede atribuir este campo eléctrico en el conductor a un campo externo a la superficie del conductor. Se considera que la región $z > 0$ representa a un conductor y la región $z < 0$ a un medio dieléctrico perfecto (sin pérdidas). El campo eléctrico en la superficie ($z=0$) está dado por:

$$(E_x)_{z=0} = E_{xp} \cos(\omega t) \quad (3.32)$$

Si se hace uso de la relación constitutiva (3.6), la cual establece que la densidad de corriente dentro de un conductor es directamente proporcional a la intensidad de campo eléctrico, se puede escribir que:

$$J_x = \sigma E_x = \sigma E_{xp} e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \quad (3.33)$$

Las ecuaciones (3.31) y (3.33) contienen riqueza de información. Considerando primero el término negativo exponencial, se encuentra una disminución exponencial de la densidad de corriente de conducción y en la intensidad de campo eléctrico a medida que la penetración en el conductor aumenta (alejándose de la fuente). El factor exponencial es uno en $z=0$ y disminuye a $e^{-1} = 0.368$ cuando

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \quad (3.34)$$

Esta distancia se denota como δ y se le conoce como *profundidad de penetración* o *profundidad de la piel* [7]:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} \quad y \quad \gamma = \alpha + j\beta = \frac{1}{\delta} + \frac{j}{\delta} = (1 + j) \times \frac{1}{\delta} \quad (3.35)$$

Este es un parámetro importante en la descripción del comportamiento de campos electromagnéticos de baja frecuencia dentro de un conductor. Para tener una idea de la magnitud de la profundidad de penetración considérese la conductividad del cobre a 75°C (temperatura a la que normalmente los transformadores son calculados y garantizados) es de 4.74×10^7 mhos/m. el cobre al ser un material no-magnético, su permeabilidad relativa es de 1. De aquí que la profundidad de penetración del cobre a 60Hz es:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \times 60 \times \mu_0 \mu_r \times \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times 60 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 4.74 \times 10^7}} = 0.0094m \quad (3.36)$$

Es decir 9.4 mm. El valor correspondiente a 50Hz es de 10.3 mm. La mayoría de los elementos estructurales en un transformador son hechos de acero o de acero inoxidable. Para un acero típico grado (MS), la permeabilidad relativa es de 100 (se asume que se encuentra saturado) y una conductividad de 7×10^6 mhos/m, la profundidad de penetración es de 2.69mm a 50Hz [1].

De lo anterior se concluye que todos los campos en materiales conductores, son esencialmente cero a distancias mayores a la profundidad de penetración. Cualquier densidad de corriente o intensidad de campo eléctrico establecida en la superficie de un conductor disminuye rápidamente a medida que penetra en el conductor. Las corrientes establecidas en la superficie del conductor se propagan en dirección perpendicular a la dirección de la densidad de corriente, y son atenuadas por pérdidas óhmicas. Con el propósito de encontrar éstas pérdidas de potencia, es necesario emplear el teorema de Poynting [32].

3.3 Vector de Poynting

El teorema de Poynting expresa la Ley de la Conservación de la Energía aplicada a los campos electromagnéticos. Cuando se desprecia la corriente de desplazamiento, el teorema de Poynting se puede expresar matemáticamente como:

$$-\oint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_v \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dv + \int_v \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dv \quad (3.37)$$

donde v es el volumen encerrado por la superficie s y \mathbf{n} es el vector unitario normal la superficie. Al emplear la ecuación constitutiva (3.6), la ecuación (3.37) se puede modificar como:

$$-\oint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_v \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dv + \int_v |\mathbf{J}|^2 \, dv \quad (3.38)$$

Esta ecuación es una simplificación del teorema de Poynting, la cual establece que la potencia total que entra a un volumen es igual a la suma de la potencia absorbida por el campo magnético y las pérdidas óhmicas [33]. El vector de Poynting está dado por el producto vectorial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.39)$$

elcual expresa la densidad de potencia instantánea que fluye en un punto.

Para el caso en donde la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} tiene una sola componente (x) y varía como una función de z , la ecuación (3.15) se convierte en:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0 \quad (3.40)$$

Al substituir el valor de E_x de la ecuación (3.34) en la ecuación anterior se tiene

$$H_y = \frac{1}{-j\omega\mu} \times \frac{\partial}{\partial z} (E_{xp} e^{-\gamma z}) = \frac{\gamma E_x}{j\omega\mu} \quad (3.41)$$

La relación entre E_x y H_x esta definida como la *impedancia intrínseca* η ,

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (3.42)$$

Al substituir el valor de γ de la ecuación (3.26) en la ecuación anterior se tiene

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \quad (3.43)$$

Ahora se usa la ecuación (3.35) para reescribir la ecuación anterior como

$$\eta = \sqrt{j} \left[\frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \right] \frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\sqrt{1 \angle 90^\circ} \times \sqrt{2}}{\sigma \delta} = \frac{\sqrt{2} \angle 45^\circ}{\sigma \delta} \quad (3.44)$$

La ecuación (3.31) puede reescribirse en términos de la profundidad de penetración como:

$$E_x = E_{xp} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \quad (3.45)$$

Empleando las ecuaciones (3.42) y (3.44), H_y puede expresarse como:

$$H_y = \frac{\sigma\delta}{\sqrt{2}} E_{xp} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta - \pi/4) \quad (3.46)$$

Ya que \mathbf{E} está dirigido en la dirección de x y \mathbf{H} se encuentra en dirección de y , el vector de Poynting (expresado como el producto vectorial de \mathbf{E} y \mathbf{H}) se encuentra en dirección z así:

$$P_z = E_x H_y = \frac{\sigma\delta}{\sqrt{2}} E_{xp}^2 e^{-2z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \cos(\omega t - z/\delta - \pi/4) \quad (3.47)$$

Al emplear la relación trigonométrica $\cos A \cos B = 1/2 [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$ en la ecuación anterior se obtiene el siguiente resultado:

$$P_z = \frac{\sigma\delta}{\sqrt{2}} E_{xp}^2 e^{-2z/\delta} \left[\frac{1}{2} \{ \cos(2\omega t - 2z/\delta - \pi/4) \cos(\pi/4) \} \right] \quad (3.48)$$

La potencia promedio está dada por

$$(P_z)_{prom} = \frac{1}{2} \frac{\sigma\delta}{\sqrt{2}} E_{xp}^2 e^{-2z/\delta} \cos(\pi/4) = \frac{\sigma\delta}{4} E_{xp}^2 e^{-2z/\delta} \quad (3.48)$$

Así, se puede observar que a una distancia igual a la profundidad de penetración ($z=\delta$), la densidad de potencia es solamente 0.135 (e^{-2}) veces el valor del que se encuentra en la superficie. Lo anterior es un hecho muy importante para el análisis de corrientes de remolino con elementos finitos en el tanque de transformadores (producidas por flujos de dispersión) ya que sólo es necesario utilizar dos o tres capas de elementos para una profundidad de penetración, obteniéndose así resultados precisos [28].

La pérdida total de potencia en una placa seminfinita con una anchura $0 < y < b$ y longitud $0 < x < h$, cuando el campo eléctrico tiene un valor de 1 p. u. (por unidad) como se muestra en la figura 3.1, se obtiene encontrando la potencia que atraviesa la superficie del conductor dentro de esta área:

$$\int_S (P_z)_{prom} dS = \int_0^b \int_0^h \left[\frac{\sigma \delta}{4} E_{xp}^2 e^{-2z/\delta} \right]_{Z=0} dx dy = \frac{\sigma \delta b h}{4} E_{xp}^2 = \frac{\delta b h}{4 \sigma} J_{xp}^2 \quad (3.48)$$

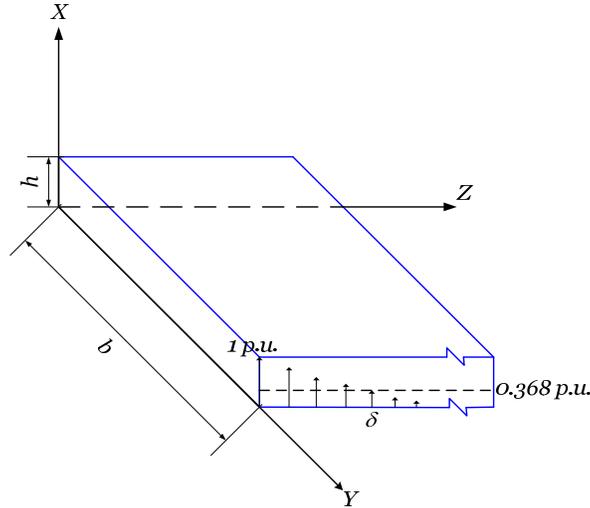


Fig. 3.1 Penetración de campo dentro de un conductor.

La pérdida de potencia que resultaría si la corriente total en una anchura b estuviese distribuida uniformemente en una profundidad de penetración del conductor, se emplea ahora las ecuaciones (3.29) y (3.35) para obtener

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^b J_x dy dz = \int_0^\infty \int_0^b \frac{E_{xp}}{\sigma} dy dz = \int_0^\infty \int_0^b \frac{E_{xp} e^{-z/\delta}}{\sigma} dy dz \\ &= \int_0^\infty \int_0^b J_{xp} e^{-\frac{(1+j)z}{\delta}} dy dz = \frac{J_{xp} b \delta}{1+j} = \frac{J_{xp} b \delta}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Por otro lado, si el total de la corriente se asume como uniformemente distribuida en una profundidad de penetración, la densidad uniforme de corriente se puede expresar en el dominio del tiempo como:

$$J_u = \frac{J_{xp}}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.49)$$

El total de las pérdidas óhmicas está entonces dada por:

$$P = \frac{1}{\sigma} \int_v J_u dv = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{J_{xp}^2}{2} \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \right) b h \delta \quad (3.50)$$

El valor promedio de la potencia se puede encontrar como:

$$P_{prom} = \frac{bh\delta}{2\sigma} (J_{xp}^2)_{prom} \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{bh\delta}{2\sigma} (J_{xp}^2)_{prom} \left(\frac{1}{2} \left\{1 + \cos 2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\right) \quad (3.51)$$

Ya que el valor promedio de una función cosenoidal es cero la potencia promedio es:

$$P_{prom} = \frac{bh\delta}{4\sigma} J_{xp}^2 \quad (3.51)$$

La ecuación anterior es exactamente igual a la ecuación (3.48) de aquí que las pérdidas de potencia promedio en un conductor se pueden calcular asumiendo que el total de corriente está distribuida de forma uniforme en una profundidad de penetración. Esto es un resultado muy importante, el cual es empleado en el cálculo de pérdidas en regiones conductoras empleando métodos numéricos. Cuando un método numérico como el Método del Elemento Finito (MEF) se emplea para determinar las pérdidas *stray* en tanques de transformadores, es importante tener elementos más pequeños que la profundidad de penetración del material del tanque del transformador. Con dimensiones de altura del tanque que normalmente está en metros, es muy difícil tener elementos muy pequeños dentro del espesor del tanque del transformador. De aquí que es conveniente el uso de aproximaciones semi-analíticas para simplificar el análisis numérico [33-34]. Por ejemplo la ecuación anterior se emplea para determinar las pérdidas en tanque de transformadores en modelos en tres dimensiones de elementos finitos. El método asume una densidad de corriente uniforme en una profundidad de penetración con el fin de evitar el uso de una gran cantidad de elementos. Específicamente se dejan de modelar los conductores masivos donde la profundidad de penetración es muy pequeña. Para ello se utiliza concepto de *impedancia de superficie* [26,28] como una condición de frontera en la superficie del conductor. La impedancia intrínseca puede reescribirse de la ecuación (3.43) como

$$\eta = R + jX = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = 1\angle 45^\circ \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (3.52)$$

La parte real de la impedancia, es la resistencia superficial, esta dada por

$$R = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (3.52)$$

Después de calcular el valor rms de la componente tangencial de la intensidad de campo magnético (H_{rms}) en la superficie del tanque u otra componente estructural del transformador, empleando cualquier técnica numérica, las pérdidas específicas por unidad de superficie se pueden calcular empleando la expresión:

$$P = RH_{rms}^2 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} H_{rms}^2 \quad (3.52)$$

Así las pérdidas totales en el tanque del transformador se obtienen integrando las pérdidas específicas sobre la superficie interna [35].

3.4 Corrientes de Remolino en Tres Dimensiones

Un problema típico de corrientes de remolino de baja frecuencia es mostrado en la figura 3.2 [7]. Consiste en una región de corrientes de remolino con conductividad diferente de cero (Ω_1) rodeada por otra región (Ω_2) libre de corrientes de remolino, la cual podría contener fuentes de corriente. La unión de Ω_1 y Ω_2 , esto es la región del problema, es denotada por Ω . La frontera de Ω_2 , y por lo tanto de Ω , es dividida en dos partes en concordancia con los dos tipos de condiciones de frontera: en Γ_B , la componente normal de la densidad de flujo magnético es prescrita, mientras que en Γ_H , la componente tangencial de la intensidad de campo magnético es especificada. La frontera de Ω_1 denotada por Γ_{12} es la interfase entre las regiones conductoras y no conductoras.

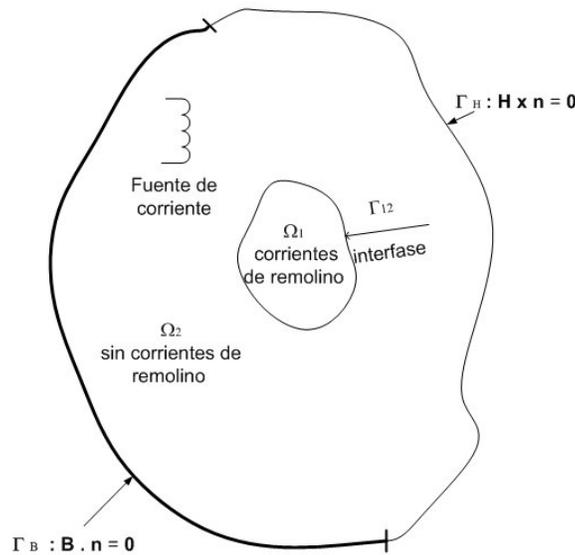


Fig. 3.2. Regiones, secciones de frontera e interfases en un problema típico de corrientes de remolino.

Las condiciones de frontera en la interfase son continuas [36], esto es, existe continuidad tanto en la componente normal de la densidad de flujo magnético y la componente tangencial de la intensidad de campo magnético. En suma, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema de las corrientes de remolino son:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega_1 \quad \begin{aligned} (3.53) \\ (3.54) \\ (3.55) \end{aligned}$$

y

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_s \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega_2 \quad \begin{aligned} (3.56) \\ (3.57) \end{aligned}$$

las condiciones de interfase, son las siguientes:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_B \quad (3.58)$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_H \quad (3.59)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 &= 0 \\ \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1 + \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \text{ en } \Gamma_{12} \quad \begin{aligned} (3.60) \\ (3.61) \end{aligned}$$

donde \mathbf{J}_s denota la densidad de corriente de las fuentes externas, \mathbf{n} es un vector normal a la superficie correspondiente, y los subíndices 1 y 2 se refieren a las cantidades de las regiones Ω_1 y Ω_2 , respectivamente.

3.5 Formulaciones del problema

Existen diferentes formulaciones para la solución numérica del problema de corrientes de remolino, las cuales se basan en encontrar los potenciales magnéticos (o eléctricos) vectoriales (o escalares) [7].

3.5.1 Formulación \mathbf{A} , V - \mathbf{A}

Esta formulación usa el potencial magnético vectorial \mathbf{A} en ambas regiones Ω_1 y Ω_2 y también el potencial eléctrico escalar en Ω_1 . Los campos vectoriales son obtenidos a partir de los potenciales magnético vectorial \mathbf{A} y eléctrico escalar V como:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (3.63)$$

Estas especificaciones aseguran el cumplimiento de (3.54) y (3.55) en la región Ω_1 , así como de (3.57) en Ω_2 . La ley de Ampere (3.53) y (3.56) se puede manipular para obtener:

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_1 \quad (3.64)$$

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s \quad \text{en } \Omega_2 \quad (3.65)$$

Las condiciones de frontera (3.58) y (3.59) son formuladas como:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad \text{en } \Gamma_B \quad (3.66)$$

$$\nu \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_H \quad (3.67)$$

mientras las condiciones en la interfase son:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{A}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{A}_2 = 0 \\ \nu_1 \nabla \times \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_1 + \nu_2 \nabla \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad \text{en } \Gamma_{12} \quad (3.68)$$

$$(3.69)$$

Las ecuaciones (3.64)-(3.65) determinan el rotacional de \mathbf{A} y, una vez que \mathbf{A} se fija, el gradiente de V se fija también [37]. Por consiguiente es suficiente examinar \mathbf{A} para establecer las condiciones de unicidad. El hecho de que las ecuaciones escritas hasta ahora definan solamente el rotacional de \mathbf{A} implica que \mathbf{A} está definido por un gradiente de una función escalar arbitraria. A fin de hacer único a \mathbf{A} , esta ambigüedad debe ser removida. Esto es logrado definiendo la divergencia de \mathbf{A} junto con su rotacional. Este procedimiento es referido usualmente como norma. Esto en sí, sin embargo, es insuficiente para obtener la unicidad de \mathbf{A} en una región cerrada, ya que también es necesario especificar condiciones de frontera apropiadas para \mathbf{A} [38].

3.5.2 Formulación \mathbf{A} , V - ψ

Una substancial reducción computacional se puede conseguir empleando el potencial magnético escalar ψ en las regiones libres de corrientes de remolino [18] en este caso (3.62) y (3.63) siguen siendo validas en Ω_1 , mientras que en Ω_2 , es conveniente dividir la intensidad de campo magnético en dos partes como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \nabla \phi \quad (3.70)$$

donde \mathbf{H}_s es el campo magnético que existiría en el vacío debido a las corrientes de las fuentes en la región problema:

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s \quad (3.71)$$

El campo \mathbf{H}_s puede ser calculado usando la ley de Biot-Savart [31]. El potencial ϕ en (3.23) se le conoce como potencial magnético escalar reducido. Para evitar errores grandes en subregiones del tipo Ω_2 [38], con altas permeabilidades, en las cuales no existen corrientes de fuentes, el campo magnético se deriva mejor del potencial total magnético escalar ψ como [17]:

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi \quad (3.72)$$

Estos dos tipos de formulaciones de potenciales escalares magnéticos son abordados con mayor detalle en [20]. Esta formulación hace cumplir la Ley de Ampere en Ω_2 , así sólo (3.57) resta para ser resuelta. De ahí que las ecuaciones diferenciales en las dos regiones son:

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_1 \quad (3.73)$$

$$\nabla \cdot \mu \nabla \psi = 0 \quad \text{en } \Omega_2 \quad (3.74)$$

donde μ es la permeabilidad del medio. Las condiciones de frontera (3.58) y (3.59) pueden ahora ser formuladas en función del potencial escalar como:

$$\mathbf{n} \cdot \mu \nabla \psi = 0 \quad \text{en } \Gamma_B \quad (3.75)$$

$$\psi = 0 \quad \text{en } \Gamma_H \quad (3.76)$$

En (3.76) se ha tomado en cuenta que Γ_H esta simplemente conectado [22], por lo que el valor constante de ψ en Γ_H se puede escoger cero. En la práctica, Γ_H podría consistir de varias partes por lo que (3.76) podría ser inhomogéneo, donde ψ toma diferentes valores constantes en varias partes de Γ_H . Esto podría también constituir una excitación diferente de cero, prescribiendo voltajes magnéticos entre partes de Γ_H .

Las condiciones en la interfase a lo largo de Γ_{12} son ahora:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{A}_1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mu_2 \nabla \psi &= 0 \\ \nu_1 \nabla \times \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_1 - \nabla \psi \times \mathbf{n}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad \text{en } \Gamma_{12} \quad (3.77)$$

$$(3.78)$$

3.5.3 Formulación \mathbf{A} , $V - \mathbf{A} - \psi$

El uso del potencial magnético escalar en regiones no conductoras falla si la región conductora es múltiplemente conectada [22]. Un método exitoso para resolver este caso ha sido propuesto en [20]: el potencial magnético vectorial puede ser usado en “hoyos no conductores” de los conductores que producen el campo magnético. Un caso típico es mostrado en la figura 3.3. La región conductora Ω_1 es múltiplemente conectada. La región no conductora Ω_3 es seleccionada tal que su unión con Ω_1 resulta en una región simplemente conectada. Es posible ahora utilizar el potencial magnético vectorial en lugar del potencial magnético escalar en Ω_3 , incorporando la formulación del potencial escalar alrededor de la región simplemente conectada. Las consideraciones arriba descritas resultan en una formulación combinada de la formulación \mathbf{A} , $V - \mathbf{A}$ y de la formulación \mathbf{A} , $V - \psi$.

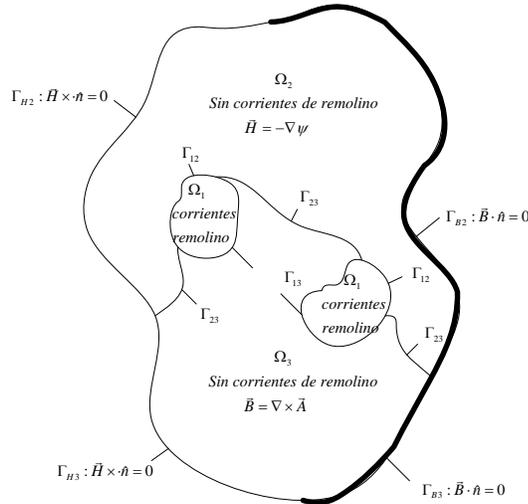


Fig. 3.3. Regiones, secciones de frontera e interfases en un problema de corrientes de remolino con la región conductora múltiplemente conectada.

Las ecuaciones diferenciales en las tres regiones son:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega_1 \quad (3.79)$$

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega_3 \quad (3.81)$$

$$\nabla \cdot \mu \nabla \psi = 0 \text{ en } \Omega_2 \quad (3.82)$$

Las condiciones de interfase y de frontera son:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{n} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \\ \nu \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \end{array} \right\} \text{ en } \Gamma_{B3} \quad (3.83)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nu \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0 \end{array} \right\} \text{ en } \Gamma_{H3} \quad (3.85)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mu \nabla \psi = 0 \quad \text{en } \Gamma_{B2} \quad (3.87)$$

$$\psi = 0 \quad \text{en } \Gamma_{H2} \quad (3.88)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_3 \\ \nu_1 \nabla \times \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_1 + \nu_3 \nabla \times \mathbf{A}_3 \times \mathbf{n}_3 = \mathbf{0} \\ \nu_1 \nabla \cdot \mathbf{A}_1 - \nu_3 \nabla \cdot \mathbf{A}_3 = 0 \end{array} \right\} \text{ en } \Gamma_{13} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) = 0 \quad \text{en } \Gamma_{12} \text{ y en } \Gamma_{13} \quad (3.92)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{n}_{13} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{n}_2 \cdot \mu \nabla \psi = 0 \\ \nu \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n}_{13} - \nu_3 \nabla \psi \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0 \end{array} \right\} \text{ en } \Gamma_{13} \quad (3.93)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nu \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n}_{13} - \nu_3 \nabla \psi \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0 \end{array} \right\} \text{ en } \Gamma_{13} \quad (3.94)$$

El conjunto de ecuaciones en derivadas parciales así como las condiciones de frontera e interfase descritas en esta sección gobiernan el problema de corrientes de remolino en regiones conductoras.

|

MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

4.1 Introducción

El Método de Elemento Finito (MEF) [3] ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas de la física y la ingeniería, ya que permite resolver casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por métodos matemáticos tradicionales. Esta circunstancia obligaba a realizar prototipos, ensayarlos e ir realizando mejoras de forma iterativa, lo que traía consigo un elevado costo y un largo tiempo de desarrollo.

El MEF permite realizar un modelo numérico del sistema real, más fácil y económico de modificar que un prototipo. Sin embargo, no deja de ser un método aproximado de cálculo debido a las hipótesis básicas del método. Los prototipos, por lo tanto, siguen siendo necesarios, pero en menor número, ya que el primer prototipo se acerca al diseño óptimo [4].

El método de los elementos finitos como formulación matemática es relativamente nuevo; aunque su estructura básica es conocida desde hace bastante tiempo, en los últimos años ha sufrido un gran desarrollo debido a los avances informáticos [3]. Han sido precisamente estos avances informáticos los que han puesto a disposición de los usuarios gran cantidad de programas que permiten realizar cálculos con elementos finitos. El manejo correcto de este tipo de programas exige un profundo conocimiento no sólo del problema con el que se trabaja, sino también de los principios del MEF. Sólo en este caso se estará en condiciones de garantizar que los resultados obtenidos en los análisis se ajusten a la realidad.

Los recursos computacionales han aportado el medio eficaz para resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el MEF, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando al parejo de las innovaciones obtenidas en el campo computacional. Esto permite la descentralización de los programas de Elementos Finitos, los cuales se han enriquecido de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis numérico, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación [5]

4.2 Conceptos generales

La idea general del método de los elementos finitos es la división de un continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos [4]. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo regirán también el del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo (infinitos grados

de libertad), que es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones, que pueden ser lineales o no.

En cualquier sistema a analizar se pueden hacer las siguientes distinciones:

- Dominio: Espacio geométrico donde se va a analizar el sistema.
- Condiciones de frontera y excitaciones: Variables conocidas que condicionan el cambio del sistema: cargas, desplazamientos, temperaturas, voltaje, fuentes de calor, etc.
- Incógnitas: Variables del sistema que se desean conocer después de que las condiciones de frontera y las excitaciones han actuados sobre el sistema: campos, desplazamientos, tensiones, temperaturas, etc.

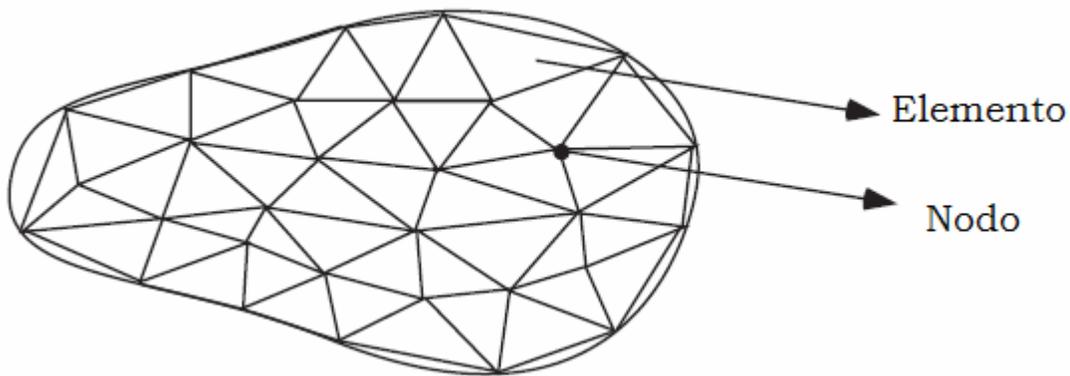


Fig. 4.1 Discretización de un dominio

El método de los elementos finitos supone, para solucionar el problema, que el dominio es discretizado en subdominios denominados elementos [4] (como se muestra en la figura 4.1). El dominio se divide mediante puntos -en el caso de una línea-, mediante líneas -en el caso bidimensional- o superficies -en el tridimensional-, de forma que el dominio total en estudio se aproxime mediante el conjunto de porciones (elementos) en que se subdivide. Los elementos se definen por un número discreto de puntos, llamados nodos, que conectan entre si los elementos. Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema. En el caso de dispositivos electromagnéticos estas incógnitas son los potenciales escalares -o vectoriales- magnéticos -o eléctricos-, ya que a partir de éstos se pueden calcular el resto de las incógnitas como son: campos, fuerzas, inductancias, etc. A estas incógnitas se les denomina grados de libertad de cada nodo del modelo. Los grados de libertad de un nodo son las variables que nos determinan el estado y/o posición del nodo [4].

Planteando la ecuación diferencial que rige el comportamiento continuo para cada elemento, se llega a fórmulas que relacionan el comportamiento en el interior del elemento correspondiente con el valor que toman los grados de libertad nodales. Este paso se realiza por medio de funciones de interpolación [3], las cuales ‘interpolan’ el valor de la variable nodal dentro del elemento.

Conocidas las matrices que definen el comportamiento de cada elemento [3], se ensamblan y se forma un conjunto de ecuaciones algebraicas, lineales o no, que resolviéndolas proporcionan los valores de los grados de libertad en los nodos del sistema. En este trabajo las ecuaciones diferenciales descritas en el capítulo anterior se resuelven utilizando el método del elemento finito.

4.3 Elementos finitos nodales tridimensionales.

Dentro de cada elemento finito nodal, una función escalar o vectorial es aproximada por una combinación lineal de funciones asociadas con los nodos. Dentro de estos elementos una función escalar es aproximada como[3-5]:

$$\Psi = \sum_{i=1}^m \Psi_i N_i \quad (4.1)$$

donde N_i es la función de forma nodal correspondiente al nodo i . El índice m es el numero de nodos en el elemento y es igual a 8 ó 4 dependiendo si se trata de un elemento hexaedro o tetraedro, respectivamente. El coeficiente Ψ_i (el grado de libertad) es el valor de Ψ en el nodo i .

Una función vectorial \mathbf{A} es tratada como tres componentes escalares, A_x , A_y y A_z en el sistema coordenado cartesiano. Entonces, cada nodo tiene tres grados de libertad en lugar de uno, y \mathbf{A} es aproximado como:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i N_i = \sum_{i=1}^m (A_{xi} \mathbf{x} + A_{yi} \mathbf{y} + A_{zi} \mathbf{z}) N_i \quad (4.2)$$

donde el coeficiente \mathbf{A}_i es el valor de \mathbf{A} en el nodo i , y A_{xi} , A_{yi} y A_{zi} son las tres componentes de \mathbf{A}_i . Cuando dos elementos comparten el mismo nodo i , los valores nodales \mathbf{A}_i en el nodo i deben tener el mismo valor. Al aplicar este procedimiento en toda la malla, se logra que la función vectorial \mathbf{A} sea normalmente y tangencialmente continua a través de las interfaces de todos los elementos.

4.3 Realización de elementos finitos.

Existen varias formas de obtener las ecuaciones de elementos finitos, el más popular (para modelos en tres dimensiones) es la forma de Galerkin del método de residuos ponderados [5]. El procedimiento numérico se explica para la formulación $\mathbf{A}, V - \mathbf{A} - \psi$ (sección 3.3.3) ya que las demás formulaciones son fáciles de obtener por ser casos particulares.

La aproximación numérica de potenciales se basa en una malla de elementos finitos (4.1) y (4.2). Los potenciales son expandidos en términos de las funciones de forma asociados con los nodos de la malla:

$$\mathbf{A} \approx \sum_i A_{xi} N_i \mathbf{x} + A_{yi} N_i \mathbf{y} + A_{zi} N_i \mathbf{z} = \sum_k A_k N_k \quad (4.3)$$

$$V \approx \sum_i V_i N_i \quad (4.4)$$

$$\psi \approx \sum_i \psi_i N_i \quad (4.5)$$

donde A_{xi} , A_{yi} , A_{zi} , son las tres componentes cartesianas del potencial magnético vectorial en el nodo i ; V_i y ψ_i son los valores de los respectivos potenciales escalares en el nodo i ; y N_i es la función de forma asociada con el nodo i que asume el valor de uno en este nodo y cero en cualquier otro nodo. Los vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} son vectores cartesianos unitarios. El subíndice k asume valores combinados de i con x , y , y z , esto es:

$$A_k = A_{xi} \text{ ó } A_{yi} \text{ ó } A_{zi} \text{ y } N_k = N_i \mathbf{x} \text{ ó } N_i \mathbf{y} \text{ ó } N_i \mathbf{z} \quad (4.6)$$

Las condiciones de frontera (3.36), (3.39), (3.41) y (3.48) son satisfechas tratando los valores nodales correspondientes como conocidos. La condición de continuidad (3.42) se satisface automáticamente definiendo un valor del potencial magnético vectorial en cualquier nodo sobre Γ_{13} .

Con el fin de obtener un sistema matricial simétrico, el potencial eléctrico escalar V es definido por una nueva función escalar v [20] como:

$$V = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.7)$$

Tomando en cuenta la ecuación (53), la forma de Galerkin [5] en las ecuaciones diferenciales (32)-(35) asociadas al nodo j son:

$$\int_{\Omega_1} N_j \cdot \left(\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \right) \cdot d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

$$\int_{\Omega_1} N_j \cdot \left[\nabla \cdot \left(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right] \cdot d\Omega = 0 \quad (4.9)$$

$$\int_{\Omega_3} N_j \cdot \left(\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \cdot d\Omega = 0 \quad (4.10)$$

$$\int_{\Omega_2} N_j \cdot \nabla \cdot \mu \nabla \psi \cdot d\Omega = 0 \quad (4.11)$$

Aplicando identidades vectoriales y el teorema de Gauss, así como las condiciones de frontera e interfase las ecuaciones pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \left(\nu \nabla \times N_j \cdot \nabla \times \mathbf{A} + \nu \nabla \cdot N_j \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma N_j \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma N_j \cdot \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \right) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_{12}} N_j \cdot (\nu \nabla \times \mathbf{A} \times \nabla \cdot \mathbf{n}_1) d\Gamma - \int_{\Gamma_{13}} N_j \cdot (\nu \nabla \times \mathbf{A} \times \nabla \cdot \mathbf{n}_1) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_{12}} N_j \cdot \mathbf{n}_1 \nu \nabla \cdot \mathbf{A} d\Gamma - \int_{\Gamma_{13}} N_j \cdot \mathbf{n}_1 \nu \nabla \cdot \mathbf{A} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\int_{\Omega_1} \left(\sigma \nabla N_j \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla N_j \cdot \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_{12} + \Gamma_{13}} N_j \cdot \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \right) \mathbf{n}_1 d\Gamma = 0 \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_3} \left(\nu \nabla \times N_j \cdot \nabla \times \mathbf{A} + \nu \nabla \cdot N_j \nabla \cdot \mathbf{A} \right) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_{13}} N_j \cdot (\nu \nabla \times \mathbf{A} \times \nabla \cdot \mathbf{n}_3) d\Gamma - \int_{\Gamma_{23}} N_j \cdot (\nu \nabla \times \mathbf{A} \times \nabla \cdot \mathbf{n}_3) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_{B3}} N_j \cdot (\nu \nabla \times \mathbf{A} \times \nabla \cdot \mathbf{n}_3) d\Gamma - \int_{\Gamma_{H3}} N_j \cdot (\nu \nabla \times \mathbf{A} \times \nabla \cdot \mathbf{n}_3) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_{13}} N_j \cdot \mathbf{n}_3 \nu \nabla \cdot \mathbf{A} d\Gamma - \int_{\Gamma_{23}} N_j \cdot \mathbf{n}_3 \nu \nabla \cdot \mathbf{A} d\Gamma - \int_{\Gamma_{B3}} N_j \cdot \mathbf{n}_3 \nu \nabla \cdot \mathbf{A} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_{H3}} N_j \cdot \mathbf{n}_3 \nu \nabla \cdot \mathbf{A} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_2} \mu \nabla N_j \cdot \nabla \psi d\Omega - \int_{\Gamma_{12}} \mu N_j \nabla \psi \cdot \mathbf{n}_2 d\Gamma - \int_{\Gamma_{23}} \mu N_j \cdot \nabla \psi \cdot \mathbf{n}_2 d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_{B2}} \mu N_j \nabla \psi \cdot \mathbf{n}_2 d\Gamma - \int_{\Gamma_{H2}} \mu N_j \cdot \nabla \psi \cdot \mathbf{n}_2 d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Si los términos que multiplican los potenciales se recogen en una matriz \mathbf{S} y los términos que multiplican las derivadas del tiempo de los potenciales se recogen en una matriz \mathbf{U} , las ecuaciones se puede escribir como:

$$\mathbf{S}\mathbf{a} + \mathbf{U} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{f} \tag{4.16}$$

donde el vector columna \mathbf{a} contiene los valores nodales de los potenciales (grados de libertad) y el lado derecho de las ecuaciones forma el vector fuente \mathbf{f} . Cuando se asume que la excitación que produce los campos magnéticos es sinusoidal, los potenciales varían también de forma sinusoidal con tiempo y pueden ser representados por fasores. La ecuación de la matriz es así:

$$\mathbf{S}\tilde{\mathbf{a}} + j\omega\mathbf{U}\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{f}} \tag{4.17}$$

donde ω es la frecuencia angular de la fuente de corriente. Los potenciales complejos pueden dividirse en partes reales e imaginarias.

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_{re} + j\mathbf{a}_{im} \quad (4.18)$$

Lo cual lleva a la siguiente ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} S & \omega U \\ \omega U & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{re} \\ \mathbf{a}_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{re} \\ \mathbf{f}_{im} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

donde \mathbf{S}_1 es la primera matriz en el lado izquierdo de la ecuación (4.19), y los vectores columnas \mathbf{a}_1 y \mathbf{f}_1 contienen las partes verdaderas e imaginarias de $\tilde{\mathbf{a}}$ y de \mathbf{f} , respectivamente.

4.4 Modelado de las bobinas.

En la mayoría de los dispositivos electromagnéticos las fuentes de campo son una o varias bobinas (como en el transformador). En este trabajo se considera que las densidades de corriente de las bobinas son uniformes, esto es, se desprecian el efecto piel y el efecto proximidad [7]. Además las espiras están empaquetadas de tal manera que la densidad de corriente se asume homogénea en toda la sección transversal de las bobinas.

Si la corriente en la bobina es conocida entonces se puede modelar empleando las técnicas mostradas en [26] que incorporan la densidad de corriente en la formulación. Si por el contrario se conoce el voltaje en las terminales de la bobina entonces la corriente debe de ser deducida del voltaje especificado. El acoplamiento entre los conjuntos de ecuaciones se lleva a cabo a través del encadenamiento de flujo magnético. Así para un devanado modelado en la región de elementos finitos siempre es posible definir una ecuación para la caída de potencial en las terminales del devanado.

La densidad de campo magnético en la región donde está la bobina es modelada usando el potencial magnético vectorial:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.20)$$

Debido a que se asume que no existen corrientes de remolino en las bobinas, el campo eléctrico se puede determinar como:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.21)$$

La bobina es descrita como un vector de vueltas que es una función en el espacio [34]. La dirección de τ es positiva a través de un filamento en un punto en el espacio en cuestión. La magnitud de τ es la densidad de vueltas a través de una superficie

imaginaria cuya normal es en la dirección de τ . Si la corriente fluye en un filamento es I entonces:

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} = \tau I \quad (4.22)$$

Esta ecuación define el campo si la corriente I es conocida. Si, por otra parte el voltaje en terminales de la bobina es especificado entonces la corriente I depende de la fuerza contraelectromotriz inducida por la variación del flujo magnético. La fuerza contraelectromotriz total puede ser obtenida proyectando el campo eléctrico inducido \mathbf{E} en la función de la densidad del vector del número de vueltas τ e integrando sobre la región entera de la bobina [35], la corriente puede estar dada por:

$$\int \tau \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} d\Omega + IR = V \quad (4.23)$$

donde:

I = corriente en una espira

R = resistencia de la bobina

V = voltaje en terminales

El campo es ahora definido por la solución simultánea de (4.22) y (4.23).

4.4 Circuito eléctricos externos acoplados al modelo de elementos finitos

En la figura 4.2 detalla un típico problema de un modelo de elementos finitos en donde la corriente se inyecta mediante una fuente de voltaje y circuitos eléctricos externos.

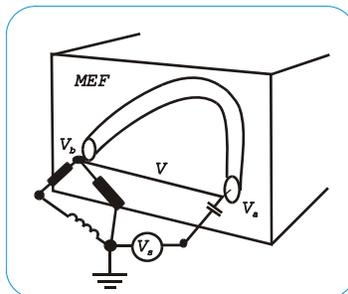


Fig. 4.2 Modelo de elementos finitos acoplados a circuitos eléctricos.

Se emplea las ecuaciones nodales de Ley de Corrientes de Kirchoff para modelar el circuito. El voltaje en cada nodo es desconocido, la suma de corrientes en un nodo es igual a cero. La corriente en cada rama es expresada en términos del voltaje a través de sus componentes.

Para un inductor conectado en los nodos A y B, se puede expresar la corriente de este circuito en términos del voltaje en terminales y añadir las ecuaciones que representan la ley de corrientes de Kirchoff.

La corriente respectiva es:

$$I_{AB} = \frac{1}{L} \left(\int V_A - \int V_B \right) \quad (4.24)$$

Similarmente para una resistencia se tiene:

$$I_{AB} = \frac{1}{R} (V_A - V_B) \quad (4.25)$$

Para el caso del capacitor se introduce como una nueva variable la integral de la corriente (carga) para expresarla en términos del voltaje en terminales, Así:

$$V_{CAP} = V_A - V_B = V_0 + \frac{\int I dt}{C} \quad (4.26)$$

Así, para un circuito RLC conectado en paralelo entre los nodos A y B se tiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1/L & -1/L & 0 \\ -1/L & 1/L & 0 \\ 0 & 0 & 1/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int V_A \\ \int V_B \\ \int I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/R & -1/R & -1 \\ -1/R & 1/R & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ I_{CAP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ V_0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Estas matrices del circuito son ensambladas en el sistema matricial completo de la misma forma en que se ensamblan las de elementos finitos

4.5 Impedancia de Superficie.

El transformador tiene partes estructurales tales como el tanque y los herrajes que sujetan al núcleo que son hechos de láminas delgadas, dichas láminas requieren de una malla de gran cantidad de elementos en el modelo de elementos finitos. En [36] se propone una solución semi-analítica para evitar modelar con elementos finitos las láminas. La solución analítica de campo magnético en las láminas se usa como una superficie de impedancia en las caras de los elementos de la interfase de las regiones conductoras y no conductoras.

El decaimiento de campo magnético dentro de una lámina puede ser modelado usando la distribución del campo en un plano conductor semi-infinito. La corriente I por unidad de longitud del plano [37] está relacionada con la densidad de corriente en la superficie por

$$I = J_s (1 - j) / 2 \quad (4.28)$$

Las pérdidas en el plano son las mismas que las ocasionadas por una densidad de corriente uniforme si la lámina tiene un espesor igual a la profundidad de penetración δ del material:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad (4.29)$$

En la región que hace frontera con la cara de la superficie, se emplea el potencial magnético escalar total que esta relacionado con la intensidad de campo magnético por:

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi \quad (4.30)$$

Aplicando la divergencia en ambos términos de la ecuación (4.30) se tiene entonces

$$\nabla \cdot \mu \nabla \psi = 0 \quad (4.31)$$

Cuando la ecuación (4.31) es discretizada y transformada, se deja las integrales de volumen y de de superficies en términos de $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ donde \mathbf{n} es un vector normal a la superficie de impedancia. La integral de $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$, sobre las interfaces de las regiones de corrientes de remolino, puede ponerse en términos de la componente normal de ψ , haciendo uso de la solución analítica [36]:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \frac{1+j}{j\omega} \nabla \times \frac{1}{\sigma\delta} (\nabla\psi \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (4.32)$$

donde σ es la conductividad de la lámina. Estos términos solamente se aplican en las interfaces de regiones de corrientes de remolino delgadas y son ensamblados dentro de la matriz global de forma usual.

4.6 .Construcción de un modelo de elementos finitos

El método de los elementos finitos aplicado al análisis electromagnético consistente en sustituir la estructura del dispositivo por un modelo matemático de un cierto numero de elementos independientes, denominados elementos finitos o discretos, unidos entre si a través de un número finito de puntos o nodos. A cada elemento finito estudiado aisladamente se le aplica la teoría clásica de cálculo, lo que es posible dada la forma elegida (en tres dimensiones -tetrahedros y prismas-) estableciéndose las condiciones de frontera y impedancia de superficies a través de los nodos. Esta discretización de la estructura permite su resolución planteando un sistema de ecuaciones lineales y se aplica fácilmente a cualquier estructura por complicadas que sean sus características geométricas y condiciones de carga. Para llevar a cabo esto, se necesitan un gran número de operaciones matemáticas, que debido a la naturaleza repetitiva se adaptan con total normalidad a la programación numérica y a su resolución con computadora. Fundamentalmente, la aplicación del método consiste en plantear para cada elemento finito las matrices \mathbf{S} y \mathbf{U} descritas en la ecuación (4.19) que relaciona los grados de libertad (potenciales magnéticos y eléctricos) con el vector fuente \mathbf{f} (compuesto por voltajes y corrientes externos inyectados en los nodos). A continuación se procede al ensamblaje de la matrices \mathbf{S} y \mathbf{U} para toda la estructura. Los elementos finitos se enlazan

entre ellos solamente mediante los nodos, lo que significa que las condiciones de frontera de la estructura no se satisfacen a lo largo de los lados. En general, dado que el método de cálculo mediante elementos finitos es un procedimiento aproximado, la precisión requerida aumenta directamente con el número de elementos empleados. No es posible concretar el número de elementos que se requieren para obtener en cada caso la solución más satisfactoria, ya que va a depender de la estructura del objeto bajo estudio. La elección de la subdivisión más conveniente ha de realizarse de acuerdo con la experiencia, basándose, si es posible, en resultados obtenidos mediante ensayos. En cualquier caso, se deben poner en práctica soluciones que hagan intervenir mallas de diferentes dimensiones con el fin de asegurar la convergencia de los resultados.

4.7 . Etapas para el cálculo con computadora

Se distinguen tres bloques bien diferenciados que componen el proceso de cálculo de campos electromagnéticos mediante el empleo de elementos finitos:

- **Preprocesador:** El objetivo principal de esta etapa es conseguir la estructura mallada mediante nodos y elementos. Estos son los puntos de control de la estructura mallada a través de los cuales se introducen las características de los materiales (permeabilidades, conductividades, etc), así como las condiciones de frontera, las impedancias de superficie y la inyección de corriente o voltaje mediante circuitos eléctricos. .
- **Máquina de Solución:** Parte interna del proceso. Resolución de sistemas de ecuaciones a partir de los datos introducidos.
- **Postprocesador:** Análisis de resultados.

El diagrama de bloques que se muestra en la figura 4.3 ilustra el procedimiento que conduce a la obtención de la distribución de campo magnético, así como las pérdidas provocadas por las corrientes de remolino en partes estructurales empleando condiciones de impedancia de superficie y la conexión externa de circuitos eléctricos, como los son fuentes de voltaje y/o corriente, resistencia, capacitancias y inductancias.

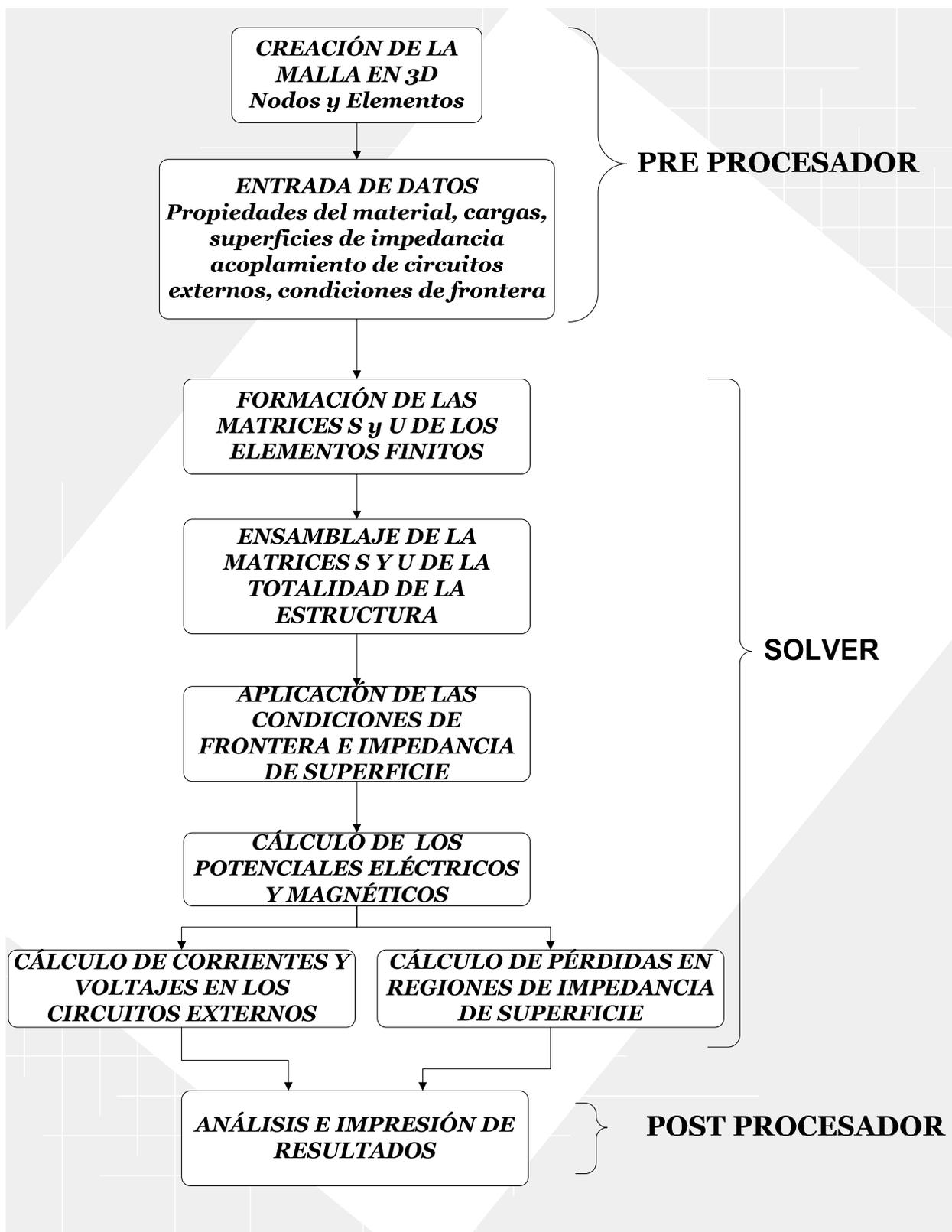
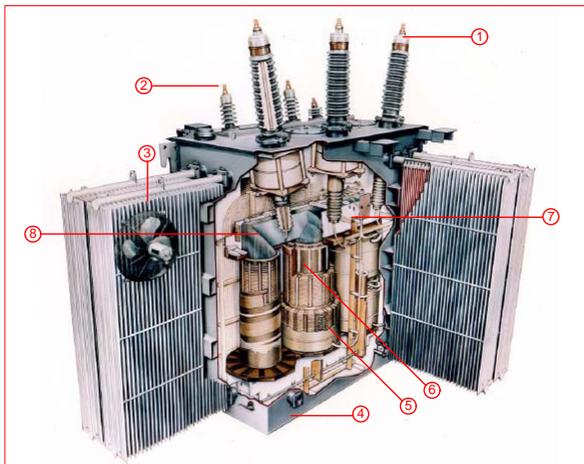


Fig. 4.3 Esquema Proceso de Cálculo mediante computadora

MODELO 3D DE ELEMENTOS FINITOS

5.1 Características del transformador.

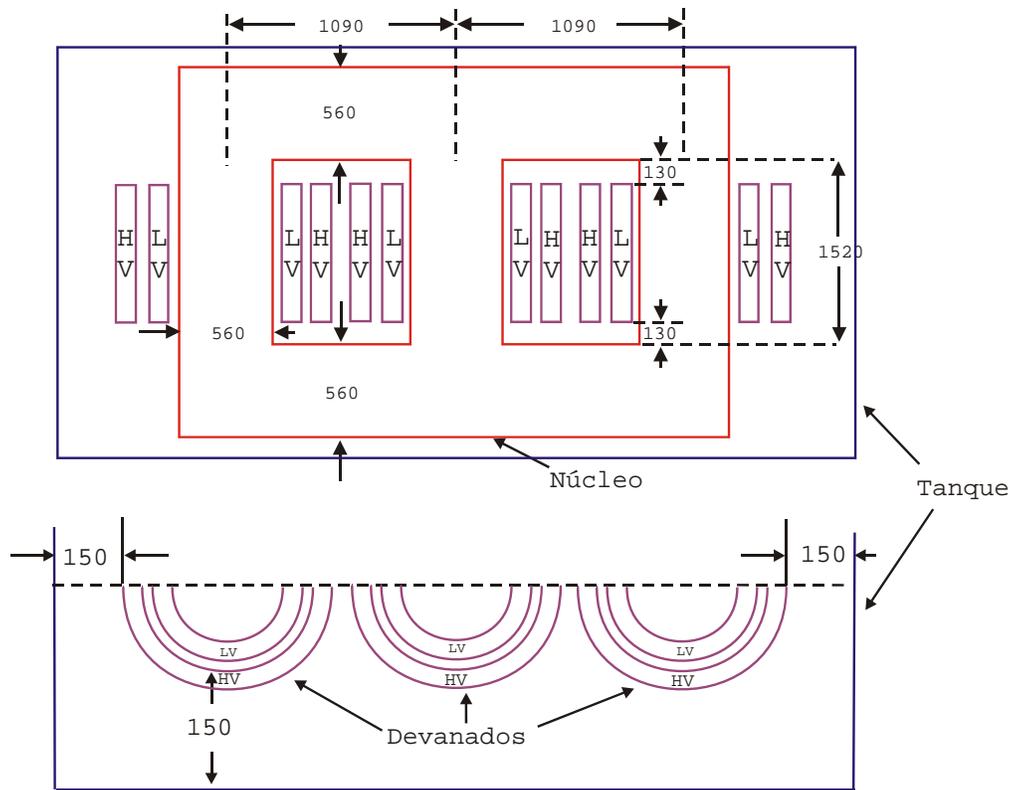
A continuación se presentan las características del transformador de potencia analizado en este trabajo. El transformador es trifásico de 31.5 MVA, con una relación de vueltas de 132 kV/33kV. Este tipo de transformador se emplea en una subestación final de transformación en la etapa de transmisión. Las partes principales de un transformador de potencia se presentan en la figura 5.1



- 1** Boquillas de alta tensión
- 2** Boquillas de baja tensión
- 3** Ventiladores
- 4** Tanque
- 5** Devanado de alta tensión
- 6** Devanado de baja tensión
- 7** Herraje
- 8** Núcleo

Fig. 5.1 Partes principales de un transformador trifásico de 31.5MVA.

Las dimensiones geométricas del transformador se muestran en la figura 5.2.



Todas las dimensiones en mm.
Fig. 5.2. Geometría del transformador.

Los datos de placa del transformador de potencia trifásico son:

Potencia nominal 31.5 MVA, Conexión estrella/delta,
 Frecuencia nominal 50 Hz,
 Voltajes nominales 132 kV/33 kV (valores de fase 132 kV/33 kV),
 Corrientes nominales 137.7 A/ 551.1 A (valores de fase 137.7 A/318.18 A),
 Número de vueltas 1000 / 433,
 Voltaje cortocircuito 14.33%,
 Pérdidas de cortocircuito 100 kW,

Las dimensiones del núcleo y de los devanados son las siguientes:

Diámetro de la columna 560 mm,
 Diámetro interno del devanado primario 606 mm,
 Diámetro interno del devanado primario 746 mm,
 Diámetro interno del devanado secundario 846 mm,
 Diámetro interno del devanado secundario 1046 mm,
 Altura de los devanados 1260 mm,

Los valores calculados y corregidos para las resistencias son:

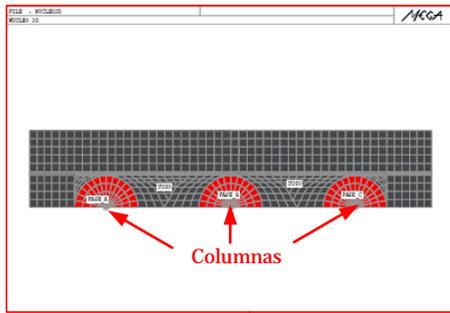
Resistencia corregida a 75°C del devanado de alta tensión $R_H = 1.022 \Omega$,
 Resistencia corregida a 75°C del devanado de baja tensión $R_X = 0.1359 \Omega$.

5.2 Creación de la malla de elementos finitos

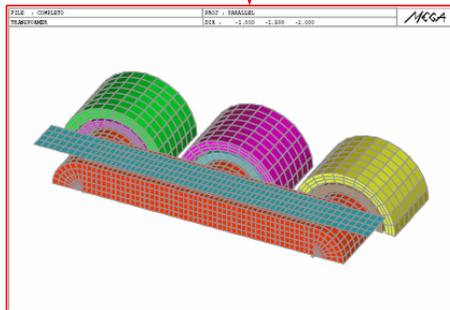
El modelo del transformador de potencia trifásico y la malla de elementos finitos creada para esta tesis se realizó con ayuda del paquete computacional MEGA V6.27 [42]. Para construir la geometría de la máquina, se creó una malla sobre un plano base, la cual contiene elementos que representan a las columnas y al yugo del transformador (las bobinas se modelan de forma independiente). En dicho plano se aplicó una herramienta de extrusión para realizar el modelo en tres dimensiones. Debido a la simetría que existe en el transformador es posible simplificar el modelo de elementos finitos si se consideran condiciones de frontera adecuadas. Esto también es equivalente a especificar condiciones de flujo magnético paralelo y flujo magnético normal. Desde el punto de vista de modelos numéricos, la condición de flujo magnético en el tanque del transformador se puede modelar de diversas formas [5-6]. Una manera práctica de lograr esto es mediante la suposición que el espesor del tanque del transformador no es mayor a la profundidad de penetración y utilizar el modelo de impedancias de superficie mostrado en el capítulo 5. Puesto que existe simetría geométrica y de excitación, es posible modelar sólo un cuarto de la geometría total del transformador. Así, quedan 6 planos. Cuatro de ellos corresponden a paredes del tanque y se especifican condiciones de impedancia de superficie en estos planos. El plano que se produce al cortar los devanados y al núcleo de forma vertical corresponde a una sección transversal donde el flujo magnético es paralelo. El plano que se produce al cortar el núcleo y los devanados de forma horizontal corresponde a una sección transversal donde el flujo magnético es normal. A continuación se describe el procedimiento que se llevó a cabo para construir las geometrías de los devanados del transformador, el núcleo, los herrajes y el tanque, y finalmente el procedimiento para obtener el modelo completo de la máquina. En la figura 5.3 se presenta la metodología empleada para realizar el modelo completo de elementos finitos, el cual incluye fuentes de voltaje externas, resistencias que representan las pérdidas en los devanados del transformador, impedancias de superficies que se implementan para realizar el cálculo de pérdidas por corrientes de remolino en partes conductoras del transformador como son los herrajes o soportes de núcleo y el tanque.

Una vez construida la malla de elementos finitos es necesario incluir las propiedades de los materiales (conductividades y permeabilidades), se han asumido valores típicos de conductividad del tanque y de los herrajes de 5×10^6 S/m. La permeabilidad en el núcleo es de 20000 también es un valor típico del acero al silicio no saturado [1].

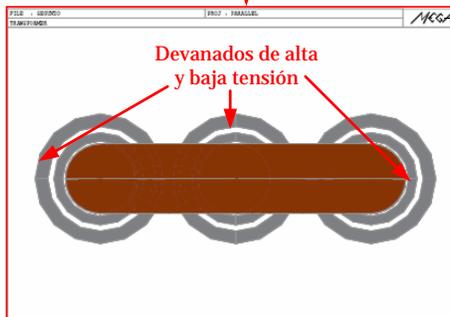
Después de establecer las condiciones de frontera y conectar las resistencias y la fuente de voltaje trifásica al transformador se procedió a obtener una solución en el dominio de la frecuencia para cada caso. El sistema de ecuaciones simultáneas tiene forma compleja, esto es, la matriz global de elementos finitos así como el vector de excitación tiene números complejos. Esto significa que la solución de los potenciales magnéticos vectoriales obtenidos son también números complejos. El propósito de este trabajo es el encontrar la distribución de campo magnético, poniendo especial atención en el flujo disperso que incide en el tanque y los herrajes del transformador, con el fin de obtener las pérdidas de potencia en esas partes estructurales del transformador.



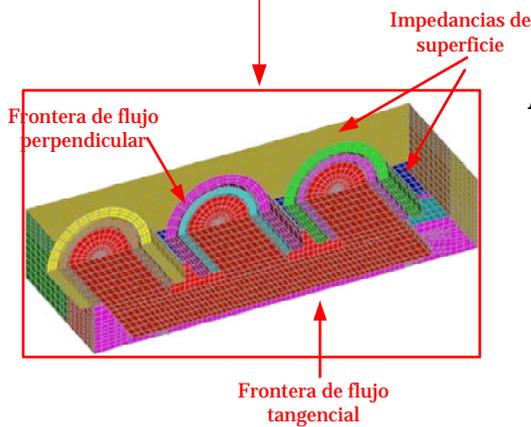
CREACIÓN DEL PLANO BASE



EXTRUSIÓN DEL PLANO BASE



CREACIÓN DE BOBINAS CONCENTRICAS



APLICACIONES DE CONDICIONES DE FRONTERA E IMPEDANCIA DE SUPERFICIE

Fig. 5.3 Metodología empleada para modelar el transformador trifásico de 31.5MVA.

RESULTADOS

6.1 Circuito Abierto

La prueba de circuito abierto (también llamada ensayo en vacío) se realiza alimentando con voltaje nominal los devanados del primario y dejando el secundario en circuito abierto (normalmente se alimenta por el lado de bajo voltaje, mientras que el lado de alto voltaje permanece abierto). La corriente en vacío es un porcentaje muy pequeño de la corriente nominal, la cual oscila entre el 0.2% y 2.0% (para transformadores muy grandes, arriba de los 300MVA, la corriente en vacío es de apenas el 0.2%); por lo que se desprecia la caída de tensión debido a las resistencias y reactancia de dispersión. La figura 6.1 muestra la conexión de los devanados del transformador así como la conexión de este con una fuente trifásica (para el transformador estudiado se tiene un voltaje nominal de 33kV)

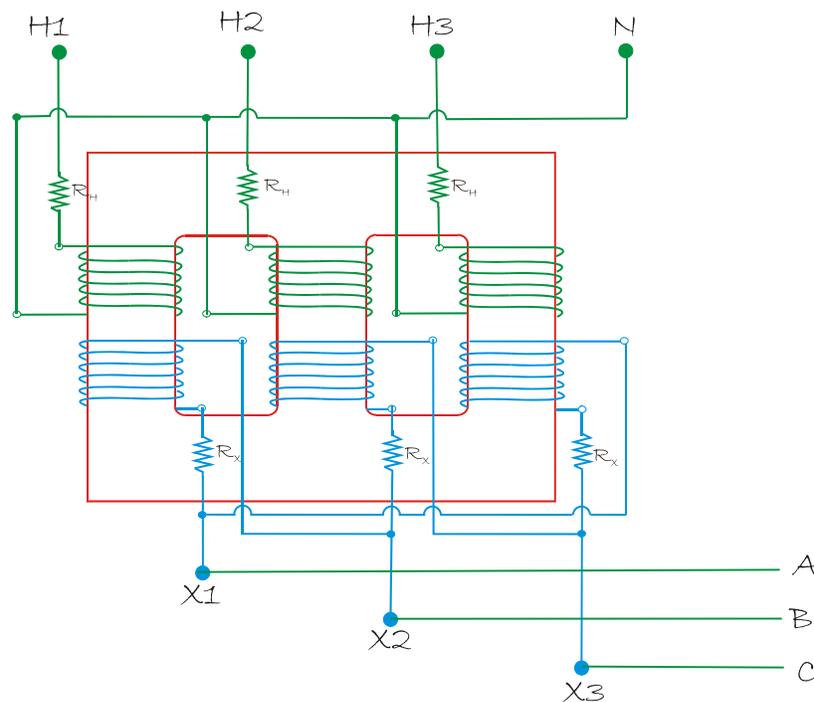


Fig. 6.1. Conexión de los devanados cuando el transformador opera en circuito abierto.

Las terminales denotadas con H corresponden a los devanados de alta tensión, las terminales denotadas con X corresponden a los devanados de baja tensión. Las resistencias R_H y R_X son las resistencias de los devanados de alta y baja tensión, respectivamente. Las terminales A,B,C se refieren a la fuente trifásica de tensión de 50Hz para el transformador analizado.

El modelo de elementos finitos, además de proporcionar la distribución de campo magnético en el transformador, también proporciona valores de corriente y voltaje en los circuitos externos, esto es, se puede conocer el voltaje inducido en los devanados de alta tensión del transformador y la corriente que circula por los devanados de baja tensión. Estos valores de corrientes y voltajes se encuentran en el dominio de la frecuencia.

Los resultados de la prueba de circuito abierto se presentan en la tabla I y la representación fasorial de los voltajes y corrientes en el devanado alimentado (bajo voltaje) se presenta en la figura 6.2

Tabla I. Voltajes y corrientes durante la prueba de circuito abierto.

FASE	Voltaje (LV,RMS) [V]	Voltaje (HV,RMS) [V]	Corriente (LV,RMS) [A]
A	33000∠0	76215.1∠-0.02	3.077∠-98.88
B	33000∠-120	76218.2∠-120.02	2.047∠150.45
C	33000∠120	76214.8∠119.97	3.125∠39.40

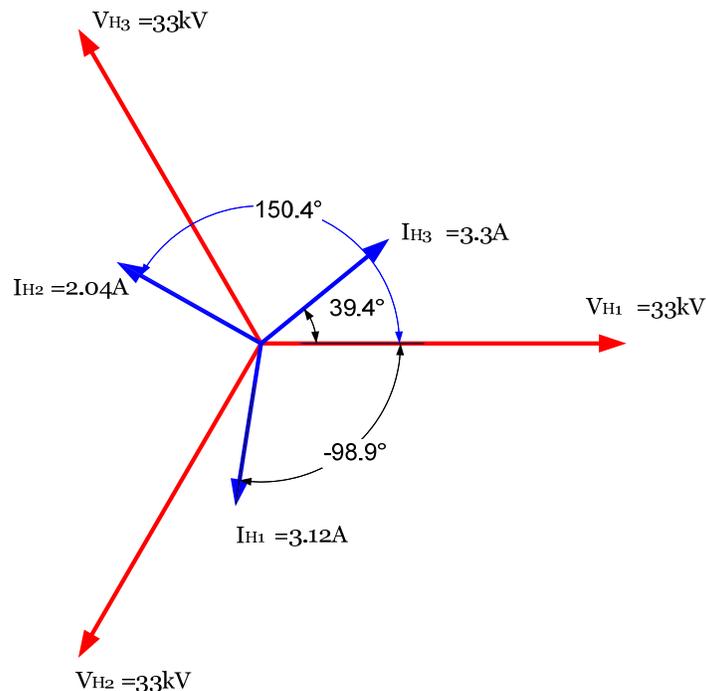


Fig 6.2 Representación fasorial de las corrientes y voltajes en el ensayo de vacío

Del diagrama fasorial y de la tabla I se puede observar claramente que la corriente en el devanado de bajo voltaje se encuentra desplazada de su respectivo fasor de voltaje por casi 90°. Esta es una condición normal ya que bajo condiciones de vacío, la fuente de voltaje trifásica ve una carga inductiva, representada por las reactancias de dispersión y magnetización.

En las figuras 6.3, 6.4 y 6.5 se presentan los resultados gráficos obtenidos en el ensayo de circuito abierto. De la distribución se muestran la magnitud de campo magnético y la distribución vectorial en un corte transversal que atraviesa las piernas y los devanados del transformador.

La primera figura corresponde al instante en que $\omega t=270^\circ$, esto es, cuando la corriente en la fase A tiene un valor máximo. En este instante de tiempo, el valor del flujo magnético también es máximo en la pierna derecha (Fase A), lo cual se puede observar de las figuras 6.3. En este instante de tiempo, el flujo magnético en las otras dos patas tiene una magnitud igual a la mitad de lo que existe en la fase A.

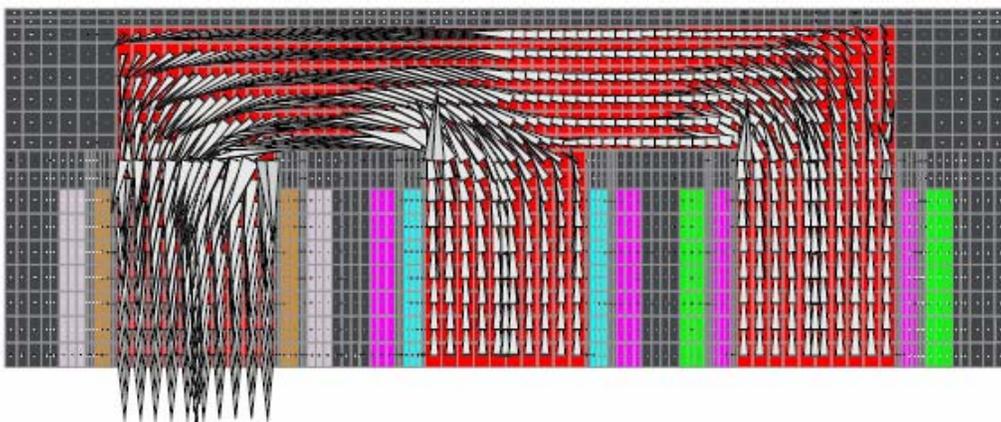
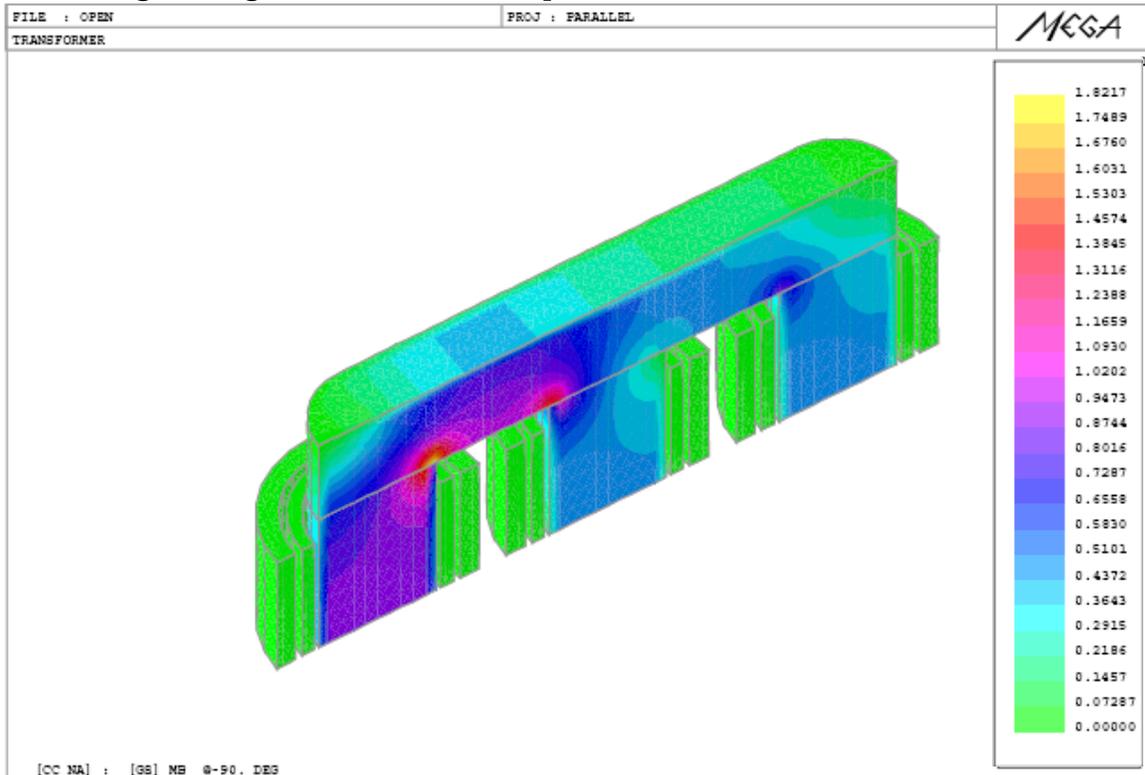


Fig. 6.3. Distribución del campo magnético durante la prueba de circuito abierto $\omega t=270^\circ$

La distribución del campo magnético máxima se concentra en la pierna central (figura 6.4) en el instante de tiempo $\omega t=30^\circ$ ya que la corriente en la fase B se encuentra en un valor máximo para ese instante de tiempo. La magnitud del flujo magnético en este instante de tiempo en las patas laterales tiene un valor idéntico al de la pata central dividido por 2.

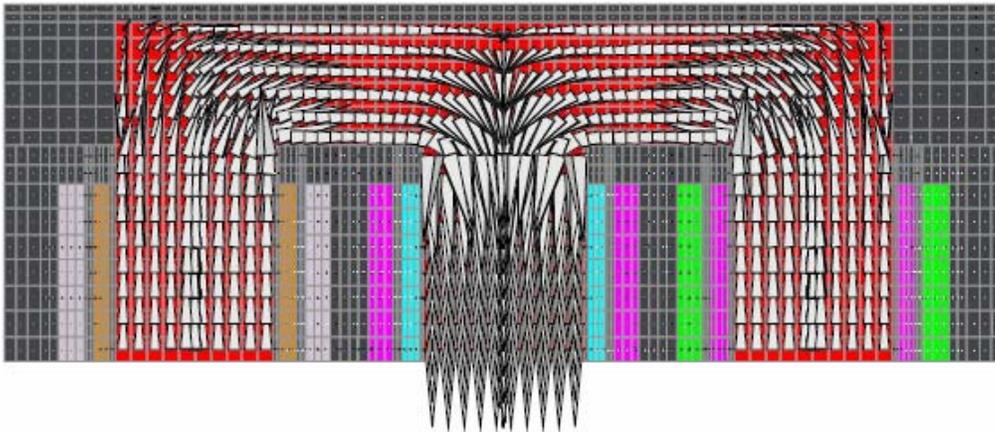
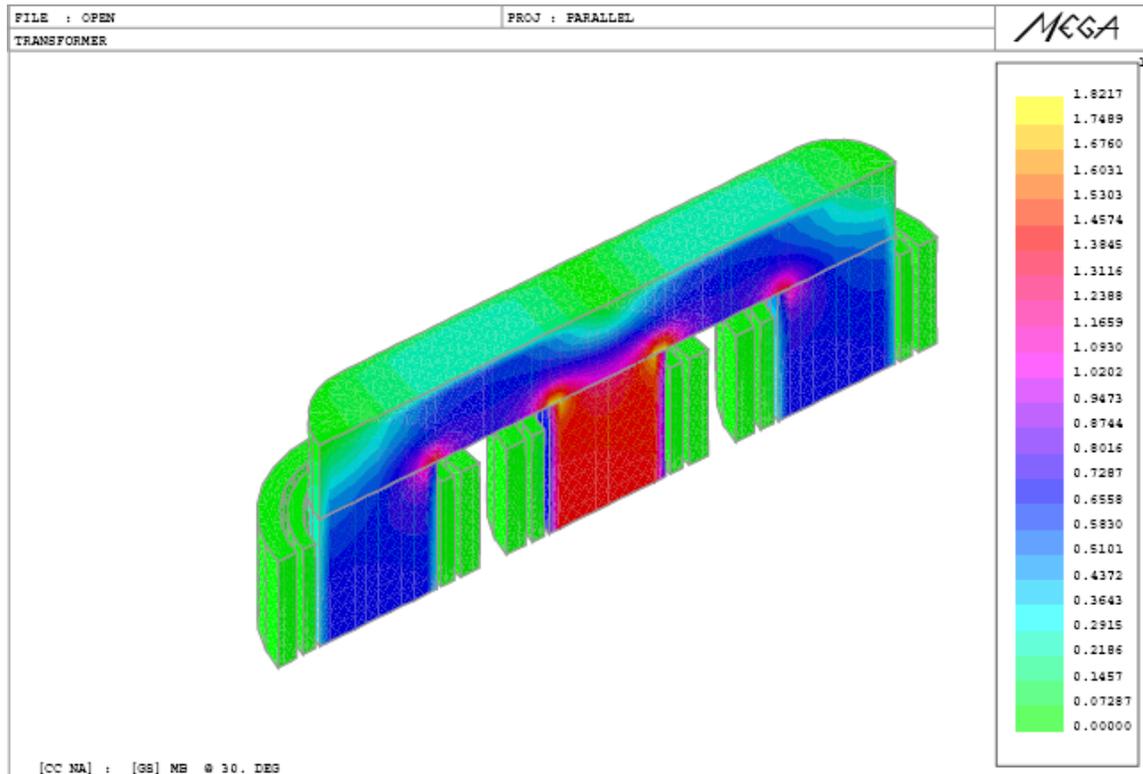


Fig. 6.4. Distribución del campo magnético durante la prueba de circuito abierto $\omega t=30^\circ$.

Por último en la fase C, el valor de la corriente es máxima en el instante $\omega t=150^\circ$, la distribución vectorial y de la magnitud del campo magnético se muestra en la figura 6.5. Es importante mencionar que el análisis gráfico que se acaba de dar es aproximado ya que se han despreciado los elementos resistivos de los devanados y las pérdidas *stray* en el transformador. Sin embargo, las pérdidas en vacío son muy pequeñas y el error de las afirmaciones que se acaba de hacer son también muy pequeñas.

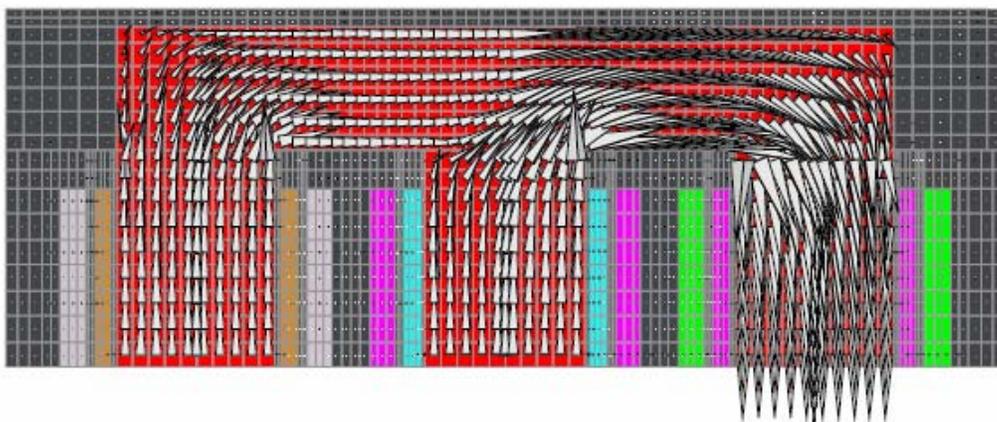
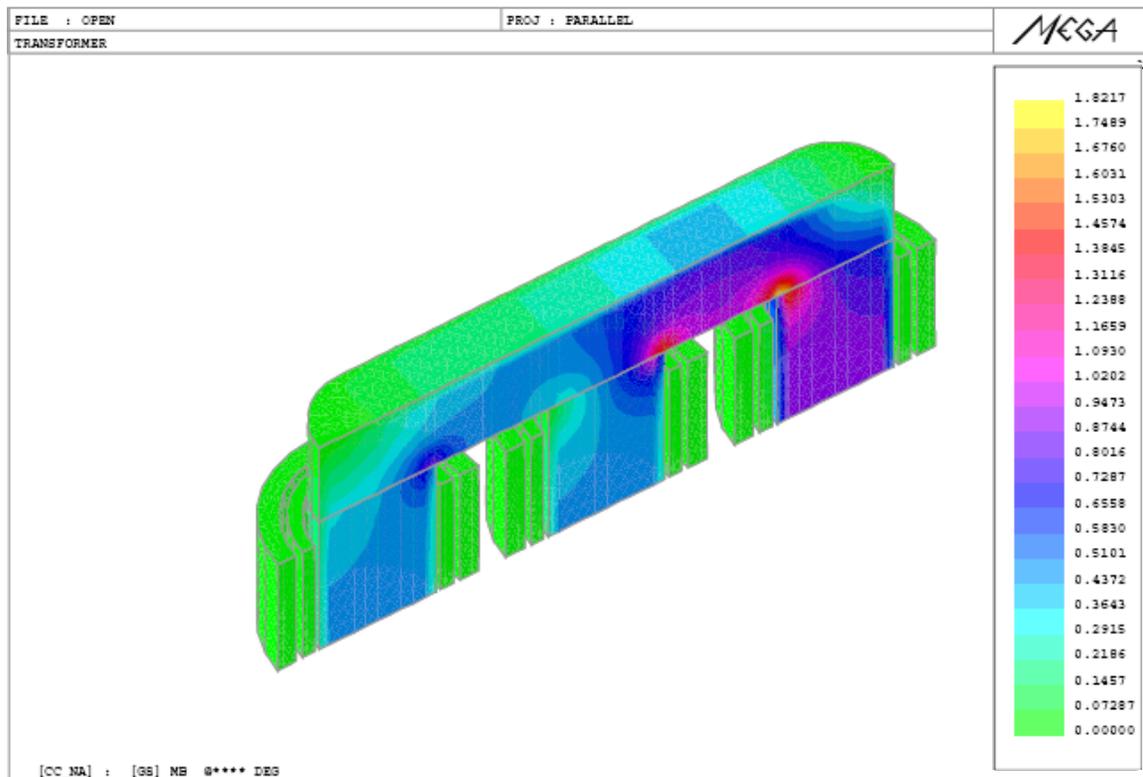


Fig. 6.5. Distribución del campo magnético durante la prueba de circuito abierto $\omega t=150^\circ$.

6.1.1 Pérdidas en el núcleo del transformador.

Es importante hacer notar que las pérdidas ocasionadas por las corrientes de remolino y las producidas por el efecto de histéresis en el núcleo, no son contempladas en el modelo de elementos finitos. Es posible realizar el cálculo de la resistencia que representan las pérdidas en el núcleo si se cuenta con una curva de densidad de pérdidas por unidad de masa en función de la densidad de campo magnético. Por otra parte, la simulación permite conocer la inducción máxima (1.6 Teslas) que se presenta en el transformador cuando éste opera en vacío (figuras 6.3-6.4).

El peso se puede calcular empleando el volumen total del núcleo multiplicado por un factor de apilamiento (0.94) y por la densidad de peso de la lámina (5.67 g/cm³). El volumen calculado empleando la sección transversal (2463 cm²) y con las alturas de las columnas (152 cm) y la longitud de los yugos (274 cm) se tiene un volumen total de 2,472,860.67 cm³ que multiplicado por el factor y la densidad se tiene un peso neto de 13,179.85 Kg.

De la curva de pérdidas proporcionada por el fabricante de la lámina del núcleo del transformador que se presenta en la figura 6.6, se obtiene la densidad de pérdidas por unidad de peso la cual para 1.6 Teslas y una frecuencia de 50Hz le corresponde un valor de 0.8 Watts por kilogramo. De los valores de densidad de pérdidas y del peso podemos conocer aproximadamente el valor de pérdidas por corrientes de remolino inducidas y por efecto de histéresis en el material magnético. El valor calculado de dichas pérdidas es de 10.54kW.

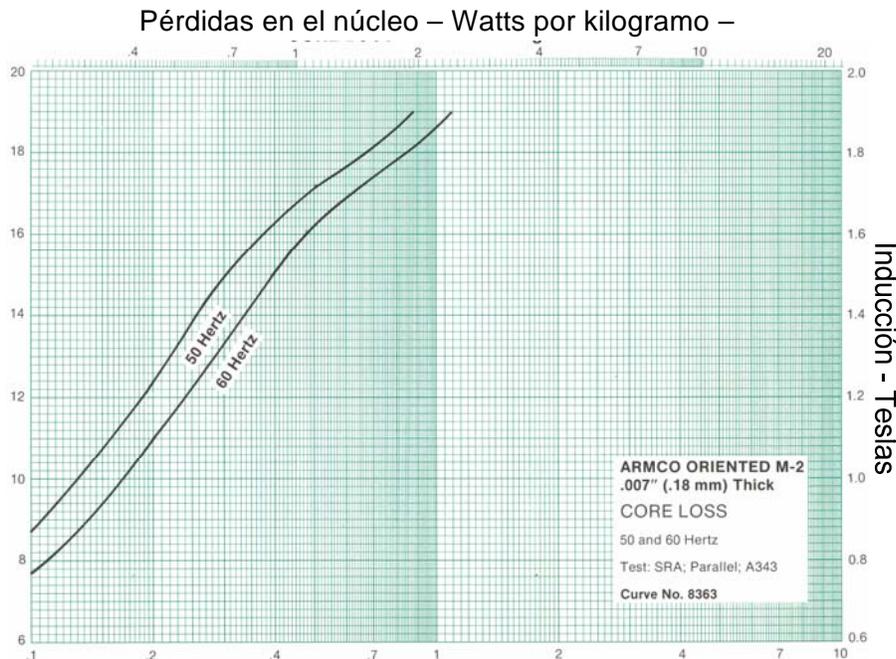


Fig. 6.6. Curva de pérdidas para una lámina de acero al silicio M-2

Para el cálculo de la resistencia que representa las pérdidas en el núcleo referida al lado de bajo voltaje se toma el valor de pérdidas por fase y el voltaje de excitación, así:

$$R_C = \frac{V_{LV}^2}{P_C} = \frac{33,000^2}{10,540/3} = 281.6k\Omega \quad (6.1)$$

Para el cálculo de la reactancia de magnetización, se tienen diferentes valores ya que el valor de esta reactancia depende de la cantidad de flujo que pase a través de de los devanados, y estos no se encuentran a la misma distancia unos de otros. Así se tiene un valor diferente de reactancia para cada fase. Así;

$$X_{m \text{ fase a}} = \frac{V_{LV}}{I_{m \text{ fase a}}} = \frac{33,000}{3.077} = 10.72k\Omega \quad (6.2)$$

$$X_{m \text{ fase b}} = \frac{V_{LV}}{I_{m \text{ fase b}}} = \frac{33,000}{2.047} = 16.12k\Omega \quad (6.3)$$

$$X_{m \text{ fase c}} = \frac{V_{LV}}{I_{m \text{ fase c}}} = \frac{33,000}{3.125} = 10.56k\Omega \quad (6.4)$$

6.2 Cortocircuito

Durante el ensayo de cortocircuito (pérdidas de carga y voltaje de impedancia) los devanados de baja tensión son cortocircuitados y los de alta tensión son alimentados con un voltaje reducido variable hasta obtener en el lado de alta tensión la corriente nominal (figura 6.7).

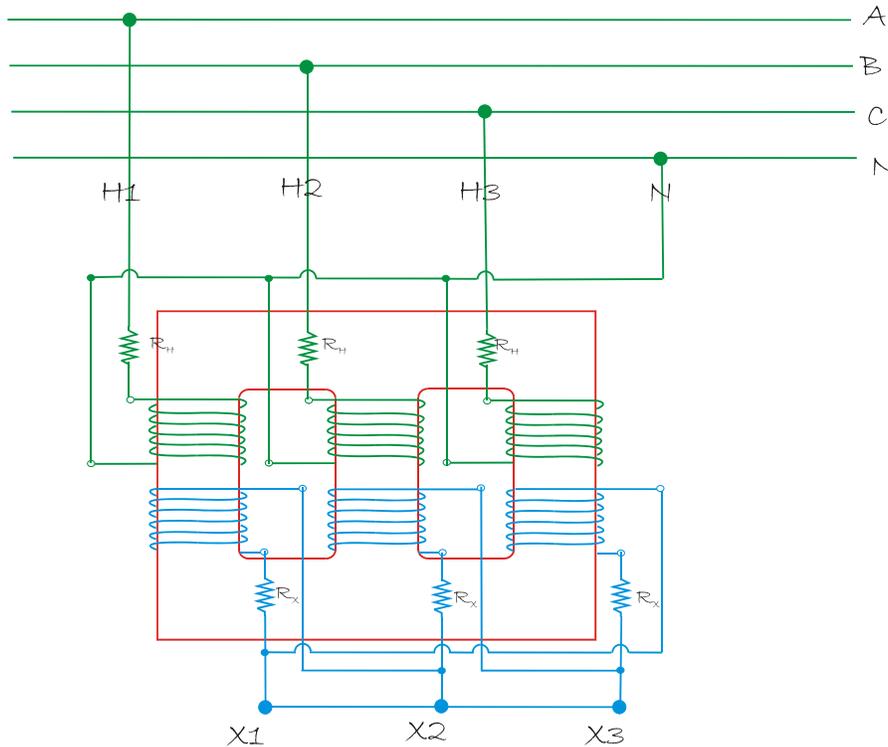


Fig. 6.7. Conexión de los devanados cuando el transformador opera en cortocircuito.

La potencia absorbida en la prueba de cortocircuito (aplicada a un transformador) consiste básicamente en pérdidas tipo Joule en los devanados (I^2R), pérdidas debidas a las corrientes de remolino en los conductores y en partes estructurales conductoras. Las pérdidas en el núcleo son despreciables debido a que la aplicación de voltaje en esta prueba no se hace en forma nominal. El voltaje de impedancia [1] de un transformador es la tensión necesaria para hacer circular la corriente nominal a través de un devanado del transformador cuando el otro devanado está cortocircuitado. Normalmente se expresa como porcentaje de la tensión nominal del devanado al cual se aplica la tensión y es igual al porcentaje de impedancia, para este caso se sabe que es de 14.33%. En la prueba de cortocircuito para un transformador trifásico, las pérdidas están dadas por:

$$P_{carga} = 3P_{I^2R} + P_{CR} + P_{stray} \quad (6.5)$$

donde :

P_{carga} : Pérdidas de carga (W)

P_{I^2R} : Pérdidas por efecto Joule (W)

P_{CR} : Pérdidas de corrientes de remolino en el cobre (W)

P_{stray} : Pérdidas stray (W).

En la figuras (6.8, 6.9 y 6.10) se muestra la distribución de campo magnético durante la prueba de cortocircuito en los instantes de tiempo en que $\omega t=0^\circ$, $\omega t=120^\circ$ y $\omega t=240^\circ$. En estos instantes se ubican los valores máximos de los voltajes para las tres fases. Estos instantes también corresponden aproximadamente a los valores mínimos de las corrientes. Cuando las corrientes pasan por un mínimo, el campo magnético es cero para las fases correspondientes. Se muestra además la distribución vectorial de la densidad de campo magnético en un corte transversal que atraviesa las piernas y los devanados del transformador para el instante de tiempo correspondiente.

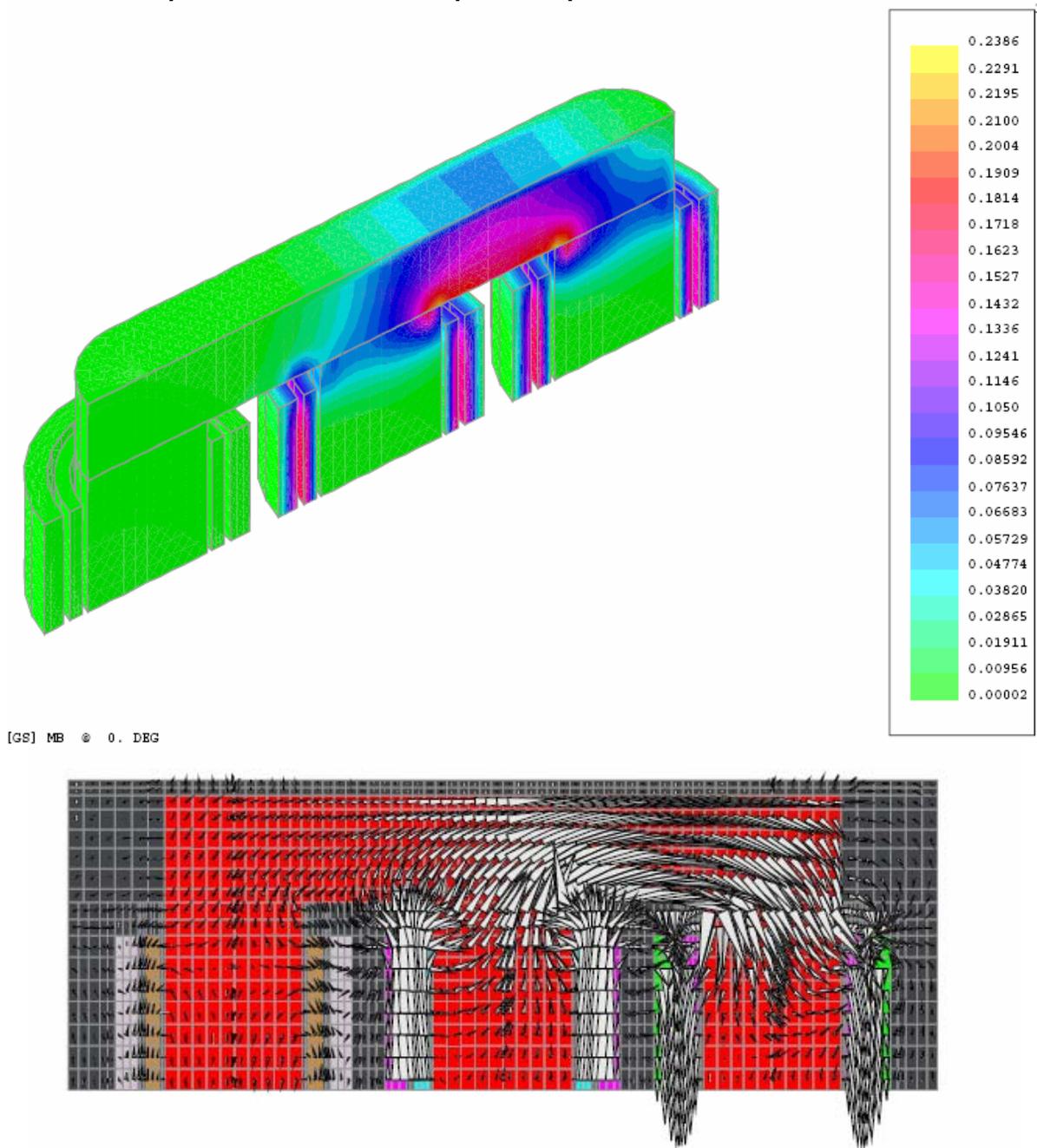


Fig. 6.8. Distribución del campo magnético durante la prueba de cortocircuito $\omega t=0^\circ$

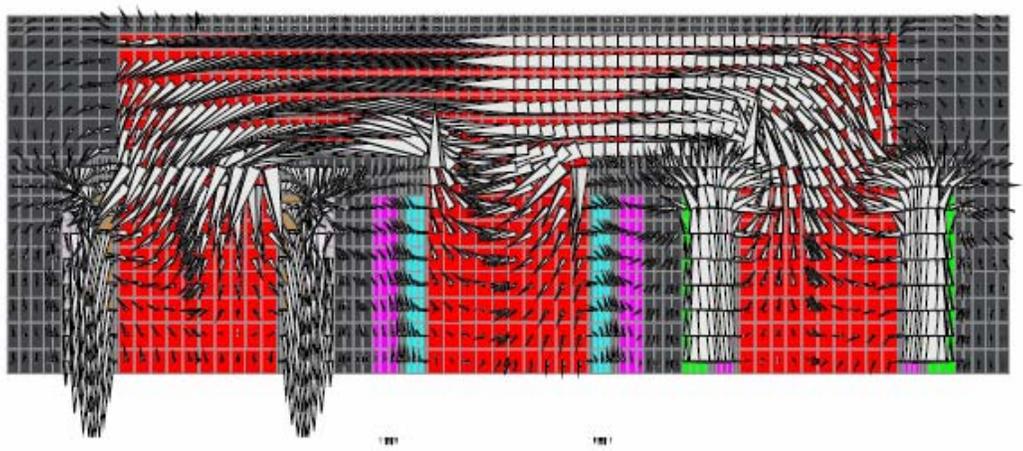
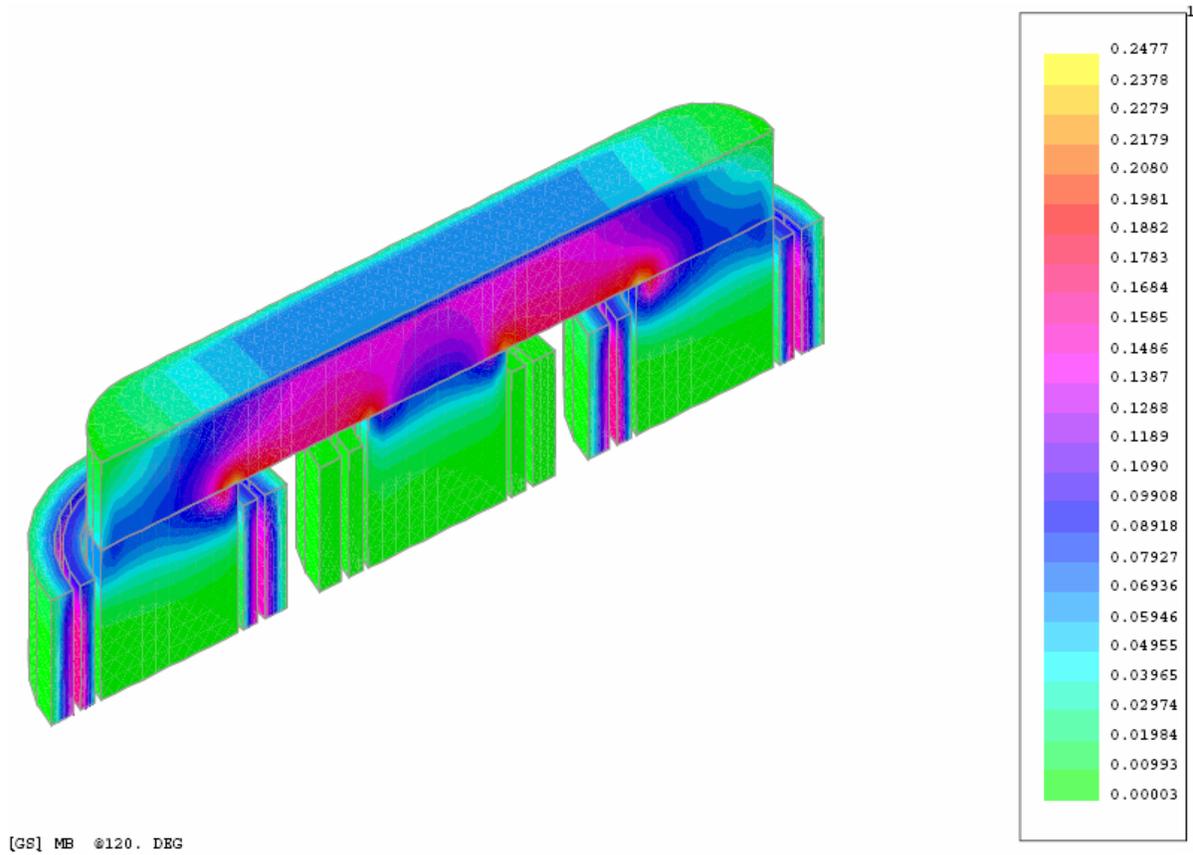


Fig. 6.9. Distribución del campo magnético durante la prueba de cortocircuito $\omega t=120^\circ$.

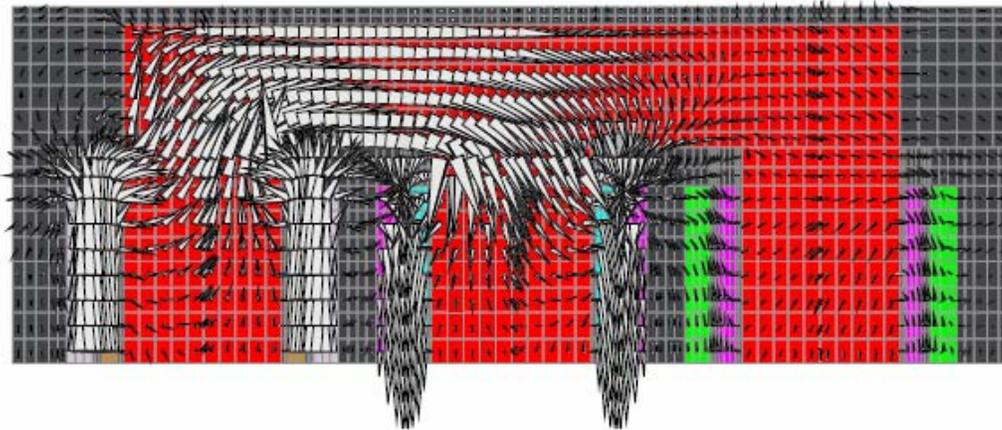
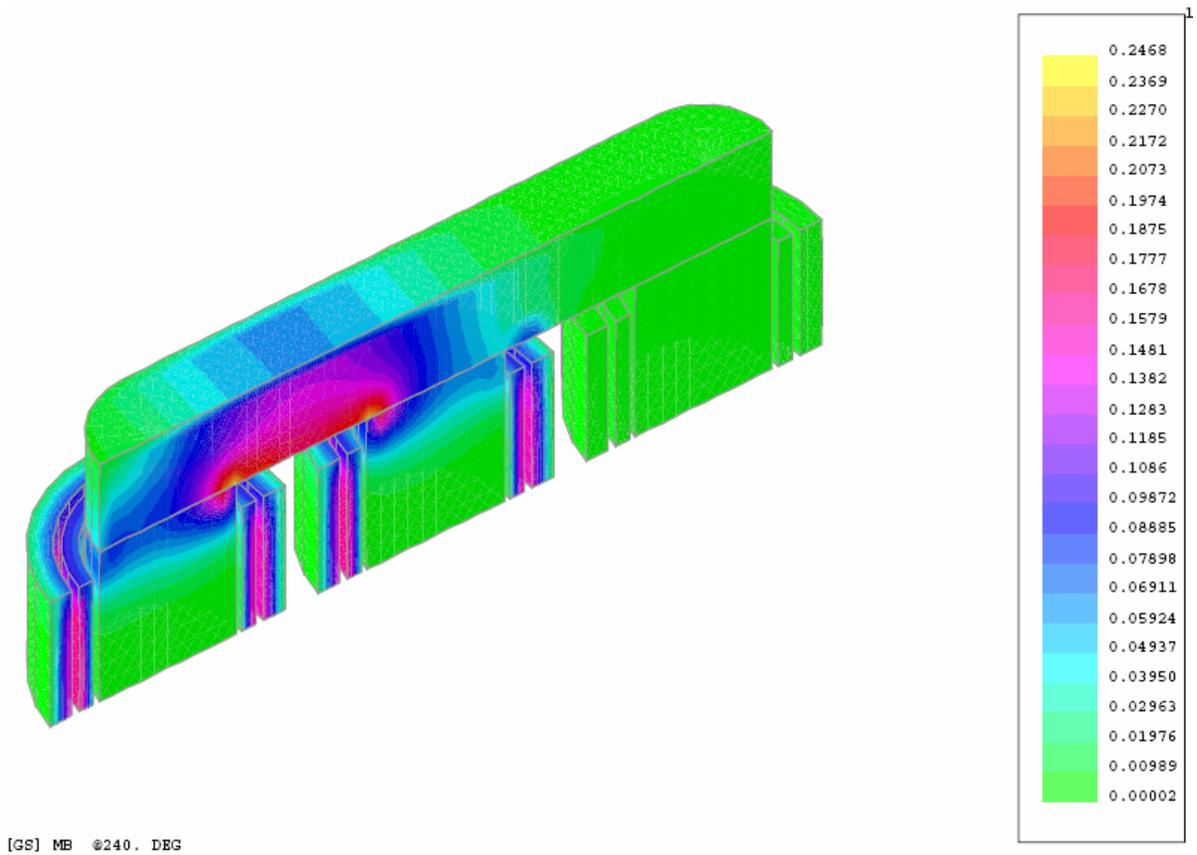


Fig. 6.10. Distribución del campo magnético durante la prueba de cortocircuito $\omega t=240^\circ$.

De las figuras anteriores se puede observar claramente que el flujo producido por los devanados es conducido por canales de aire, los cuales se identifican con las trayectorias de flujo disperso. El flujo producido por un devanado que no enlaza a ningún otro se le conoce como flujo de dispersión. La densidad máxima de campo magnético cuando el transformador opera en cortocircuito es 0.24T. Esto se debe a que el devanado secundario esta produciendo una corriente que esta en contraposición con la corriente

del primario. Muy poco flujo magnético circula por el núcleo del transformador.

En la figura 6.11 se presenta la distribución de pérdidas producidas por las diferentes densidades de corriente de remolino inducidas en los herrajes y el tanque del transformador. La distribución en los herrajes del transformador se concentra en los extremos debido a que el campo magnético encuentra más aire en estas zonas.

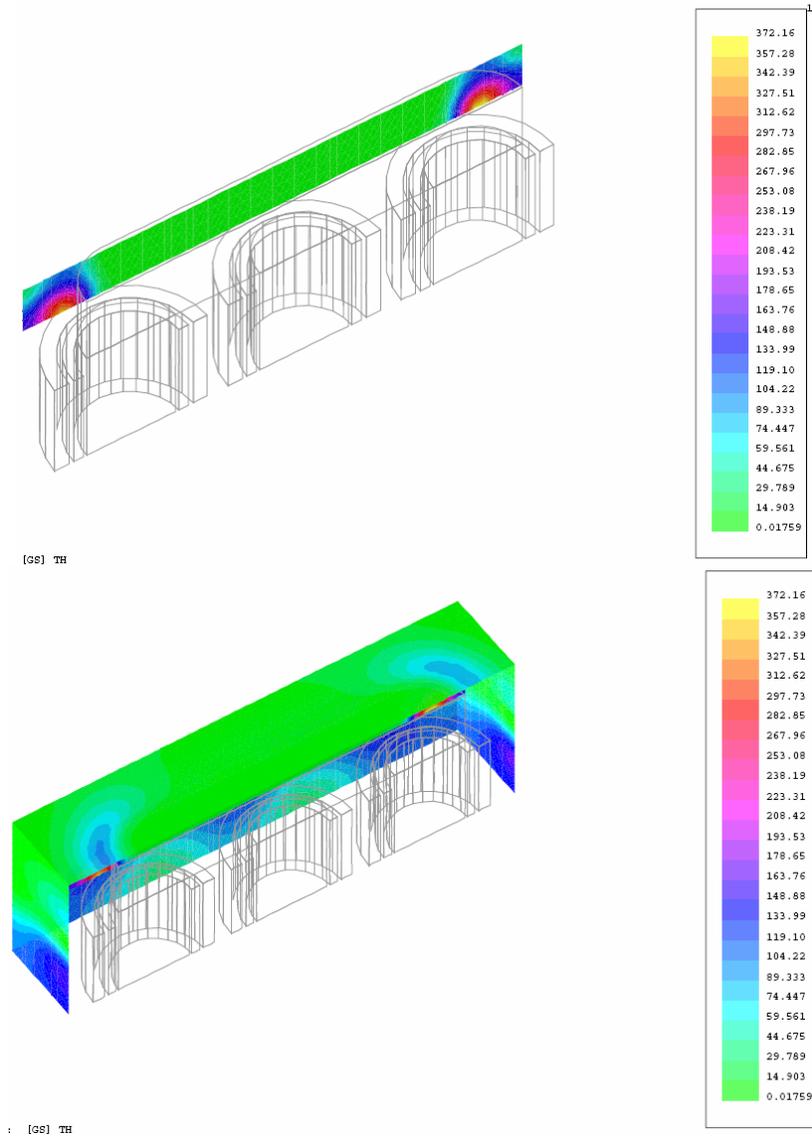


Fig. 6.11. Distribución de las pérdidas en el tanque y en el marco durante la prueba de cortocircuito.

Los resultados de la prueba de cortocircuito se presentan en la siguiente tabla II.

Tabla II. Magnitud y ángulo de voltajes y corrientes durante la prueba de cortocircuito.

FASE	Voltaje (HV,RMS) [V]	Corriente (LV,RMS) [A]	Corriente (HV,RMS) [A]
A	10910.9 $\angle 0$	318.5943973 $\angle 91.27109483$	137.804226 $\angle -88.8610295$
B	10910.9 $\angle -120$	317.6049701 $\angle -28.72440114$	137.8780422 $\angle 151.2842585$
C	10910.9 $\angle 120$	318.5518172 $\angle -148.6828969$	137.7490197 $\angle 31.44052071$

El diagrama fasorial del transformador operando en cortocircuito se presenta en la figura 6.12. Se observa claramente el defasamiento de 180° entre las corrientes del primario y el secundario. Esto se debe a que al estar en cortocircuito el transformador, se induce una corriente en el devanado secundario que es, de acuerdo a la ley de Lenz [7], opuesta a la corriente del primario que la produce.

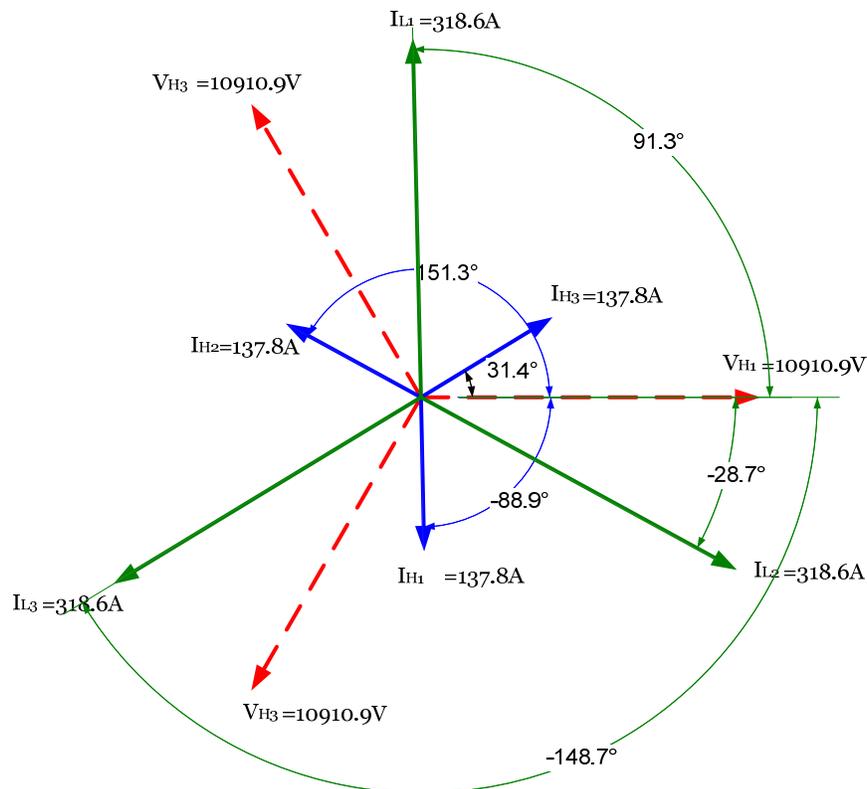


Fig 6.12 Representación fasorial de las corrientes y voltajes en el ensayo de cortocircuito

6.2.1 Pérdidas de carga en el transformador.

De las corrientes y voltajes calculados se pueden calcular la potencia entregada por las fuentes así como las pérdidas en los devanados, los cálculos de estos valores se presentan en las tablas III y IV.

Tabla III. Potencia real suministrada por las fuentes y pérdidas en los devanados del transformador.

FASE	Potencia Real suministrada por las fuentes [W]	Pérdidas en devanado de bajo voltaje, LV	Pérdidas en devanado de Alto voltaje, HV
A	29914.52928	13794.16702	19407.7721
B	33747.70946	13708.632	19392.29524
C	37818.18498	13790.51752	19428.67148
Total	101480.4237	41293.31655	58228.73882

En la prueba de cortocircuito la potencia entregada por las fuentes es consumida por las resistencias que representan los devanados y por las resistencias de las partes estructurales (tanque y herrajes) por donde circulan las corrientes inducidas.

Tabla IV. Pérdidas por corrientes de remolino en partes estructurales

Partes Estructurales	Pérdidas [W]
Tanque	1767.49744
Herrajes	192.4532
Total	1959.95064

La potencia total entregada por la fuente es de 101,480 W. Sumando las pérdidas en los devanados y las pérdidas provocadas por las corrientes de remolino se tiene un valor de 101,482 W. así se observa que las pérdidas son iguales a la potencia de entrada como es de esperarse.

De las pérdidas calculadas en la prueba de cortocircuito se pueden encontrar parámetros importantes del transformador tales como los valores de reactancia de dispersión de cada devanado, así como la resistencia que representa a las pérdidas en el tanque del transformador.

El voltaje aplicado por fase en la conexión estrella en el devanado de alto voltaje es de 10910.9 V. Para la conexión estrella, la corriente de fase es igual a la corriente de línea (137.8 A)

Así, el valor de la impedancia de dispersión y la resistencia de los devanados y la que representa a las pérdidas en partes estructurales referidas al lado de alto voltaje puede ser calculada para las tres fases como:

$$Z_{eqH1} = \frac{V_{H1}}{I_{H1}} = \frac{10910.9}{137.8} = 79.18\Omega \quad (6.6)$$

$$Z_{eqH2} = \frac{V_{H2}}{I_{H2}} = \frac{10910.9}{137.87} = 79.13\Omega \quad (6.7)$$

$$Z_{eqH3} = \frac{V_{H3}}{I_{H3}} = \frac{10910.9}{137.74} = 79.14\Omega \quad (6.8)$$

Los valores de resistencia se calculan a partir del valor de las pérdidas por fase como sigue:

$$R_{eqH1} = \frac{P_1}{I_{H1}^2} = \frac{29914.53}{137.8^2} = 1.5753\Omega \quad (6.9)$$

$$R_{eqH2} = \frac{P_2}{I_{H2}^2} = \frac{33747.71}{137.87^2} = 1.7754\Omega \quad (6.10)$$

$$R_{eqH3} = \frac{P_3}{I_{H3}^2} = \frac{37818,18}{137.74^2} = 1.993\Omega \quad (6.11)$$

Las impedancias de cortocircuito referidas al lado de alto voltaje se presentan a continuación:

$$X_{eqH1} = \sqrt{Z_{eqH1}^2 - R_{eqH1}^2} = \sqrt{79.18^2 - 1.5753^2} = 79.16\Omega \quad (6.12)$$

$$X_{eqH2} = \sqrt{Z_{eqH2}^2 - R_{eqH2}^2} = \sqrt{79.13^2 - 1.7754^2} = 79.11\Omega \quad (6.13)$$

$$X_{eqH3} = \sqrt{Z_{eqH3}^2 - R_{eqH3}^2} = \sqrt{79.14^2 - 1.993^2} = 79.11\Omega \quad (6.14)$$

Ahora, las cantidades del circuito equivalente calculadas en el lado de alto voltaje pueden referirse al lado de bajo voltaje empleando la relación de transformación a:

$$a = \frac{N_H}{N_X} = \frac{1000}{433} \quad (6.15)$$

donde N_H es el número de vueltas en el devanado de alta tensión y N_X el de baja tensión.

Así,

$$R_{eqX1} = \frac{R_{eqH1}}{a^2} = \left[\frac{433}{1000} \right]^2 \times 1.5753 = 0.2953\Omega \quad (6.16)$$

$$R_{eqX2} = \frac{R_{eqH2}}{a^2} = \left[\frac{433}{1000} \right]^2 \times 1.7754 = 0.3328\Omega \quad (6.17)$$

$$R_{eqX3} = \frac{R_{eqH3}}{a^2} = \left[\frac{433}{1000} \right]^2 \times 1.993 = 0.3736\Omega \quad (6.18)$$

Similarmente para las reactancias de dispersión

$$X_{eqX1} = \frac{X_{eqH1}}{a^2} = \left[\frac{433}{1000} \right]^2 \times 79.19 = 14.84\Omega \quad (6.19)$$

$$X_{eqX2} = \frac{X_{eqH2}}{a^2} = \left[\frac{433}{1000} \right]^2 \times 79.11 = 14.83\Omega \quad (6.20)$$

$$X_{eqX3} = \frac{X_{eqH3}}{a^2} = \left[\frac{433}{1000} \right]^2 \times 79.11 = 14.83\Omega \quad (6.21)$$

6.3 Transformador a plena carga

El transformador es conectado como se presenta en la figura 6.13, se alimenta con una fuente trifásica al los devanados de alto voltaje que están conectados en estrella, los devanados de bajo voltaje se conectan en delta. El transformador alimenta a una carga trifásica cuya potencia absorbida es la potencia nominal con un factor de potencia igual a 0.8. El modelo de elementos finitos, además de proporcionar la distribución de campo magnético en el transformador, también proporciona valores de corriente y voltaje en los circuitos externos, esto es, en los devanados del transformador y la carga conectada a los devanados secundarios.

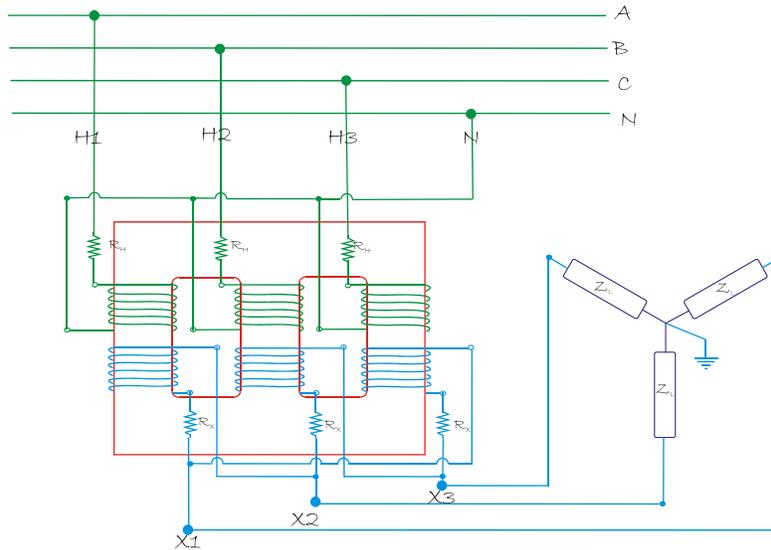


Fig. 6.13. Conexión de los devanados cuando el transformador opera a plena carga.

Los voltajes obtenidos del modelo de elementos finitos resultantes en las terminales del transformador cuando el transformador opera a plena carga se presentan en la tabla V. En la tabla VI se muestra las corrientes obtenidas y un balance de pérdidas en partes estructurales se realiza en la tabla VII.

Tabla V. Voltajes en los devanados y en la carga cuando opera el transformador a plena carga.

Devanados BT	Devanados AT
76210.2∠-180 [V]	17069.81716∠143.952218 [V]
76210.22665∠60.00001157 [V]	17068.73462∠23.93442859 [V]
76210.22665∠-60.00001157 [V]	17064.65723∠-96.05357269 [V]

Tabla VI. Corrientes en los devanados y en la carga cuando opera el transformador a plena carga.

Devanados BT	Devanados AT	Carga
316.54∠-47.79 [A]	137.11∠132.17 [A]	548.13∠102.18[A]
316.20∠-167.83 [A]	136.96∠12.12[A]	548.09∠-17.83[A]
316.52∠72.16 [A]	137.19∠-107.86[A]	547.96∠-137.81[A]

Tabla VII. Pérdidas por corrientes de remolino en partes estructurales a plena carga

Partes Estructurales	Pérdidas [W]
Tanque	1966.01904
Herrajes	198.8312
Total	2164.85024

De los resultados anteriores se observa lo siguiente:

- Los voltajes en las terminales siguen fielmente la relación de transformación para una conexión estrella-delta.
- Las corrientes que circulan por los devanados del transformador son aproximadamente igual a las corrientes nominales y la corriente que circula por la carga es $\sqrt{3}$ mayor a la corriente que circula en los devanados de baja tensión y se encuentran defasados por 30° eléctricos. (ver diagrama fasorial figura 6.14)
- En cuanto a los valores de pérdidas obtenidos en esta simulación son prácticamente los mismos que los presentados durante el ensayo de corto circuito.

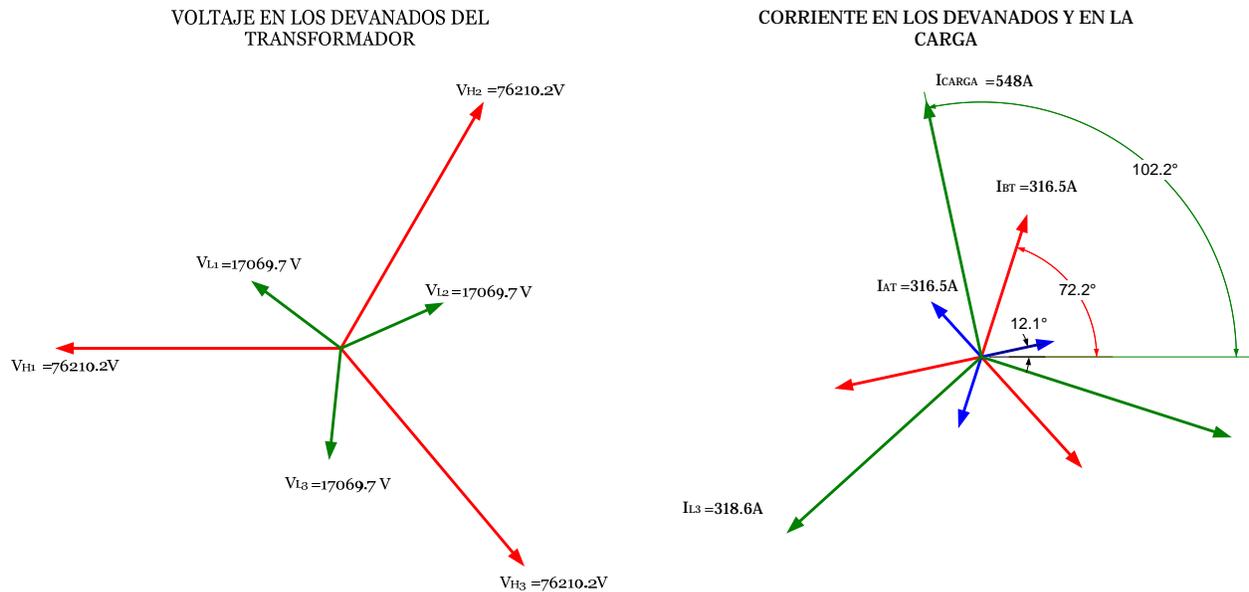


Fig 6.14 Representación fasorial de las corrientes y voltajes cuando el transformador opera a plena carga.

Las figuras (6.15, 6.16 y 6.17) presentan los resultados de la distribución del campo magnético a plena carga con un factor de potencia de 0.8 en atraso. Se presentan en diferentes instantes de tiempo durante los cuales las corrientes cosenoidales en las fases tienen un valor máximo: $\omega t = -90^\circ$, $\omega t = 150^\circ$ y $\omega t = 30^\circ$. se muestra además la distribución vectorial de la densidad de campo magnético en un corte transversal que atraviesa las piernas y los devanados del transformador para el instante de tiempo correspondiente. En este caso se observa que el campo magnético está confinado principalmente al núcleo del transformado pero la existencia de flujo disperso también es evidente de las figuras.

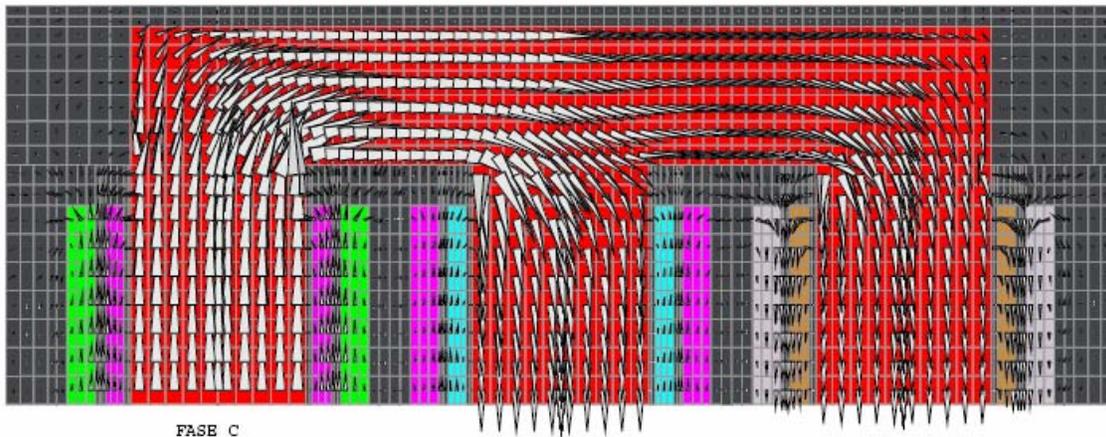
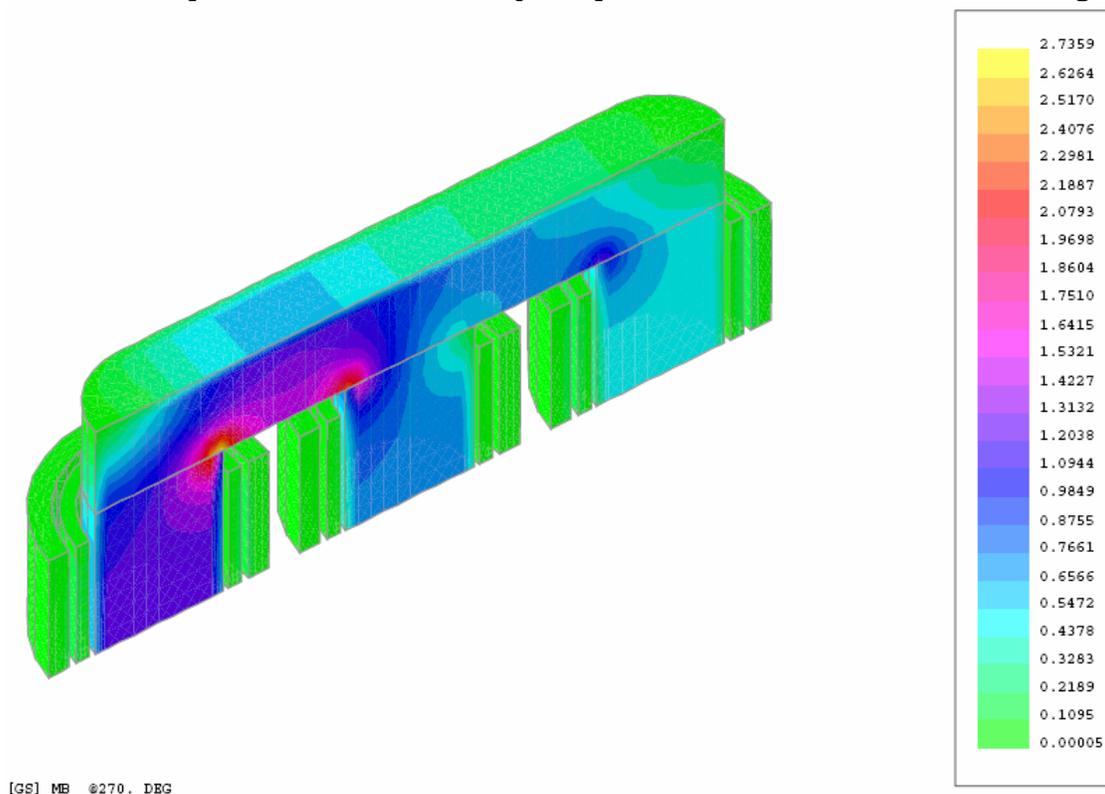


Fig. 6.14. Distribución del campo magnético a plena carga $\omega t = 90^\circ$.

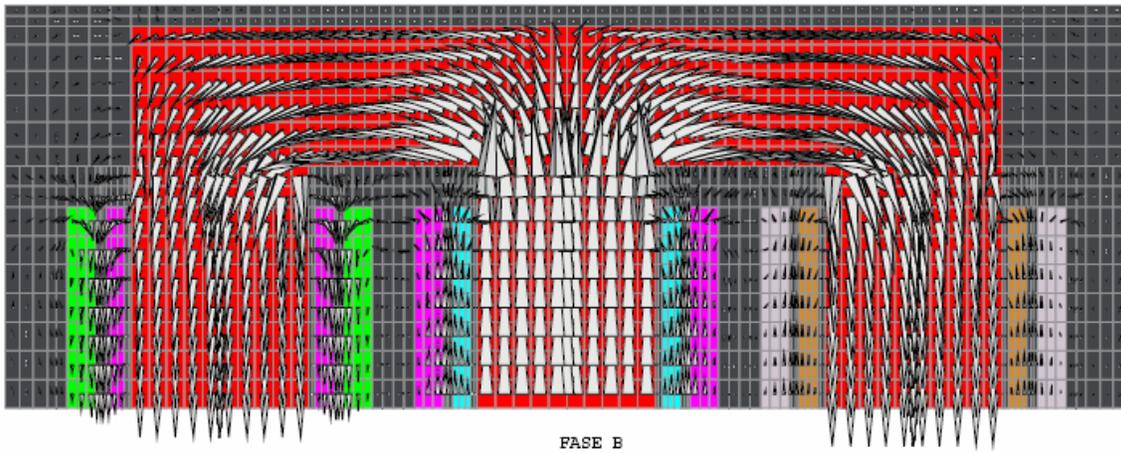
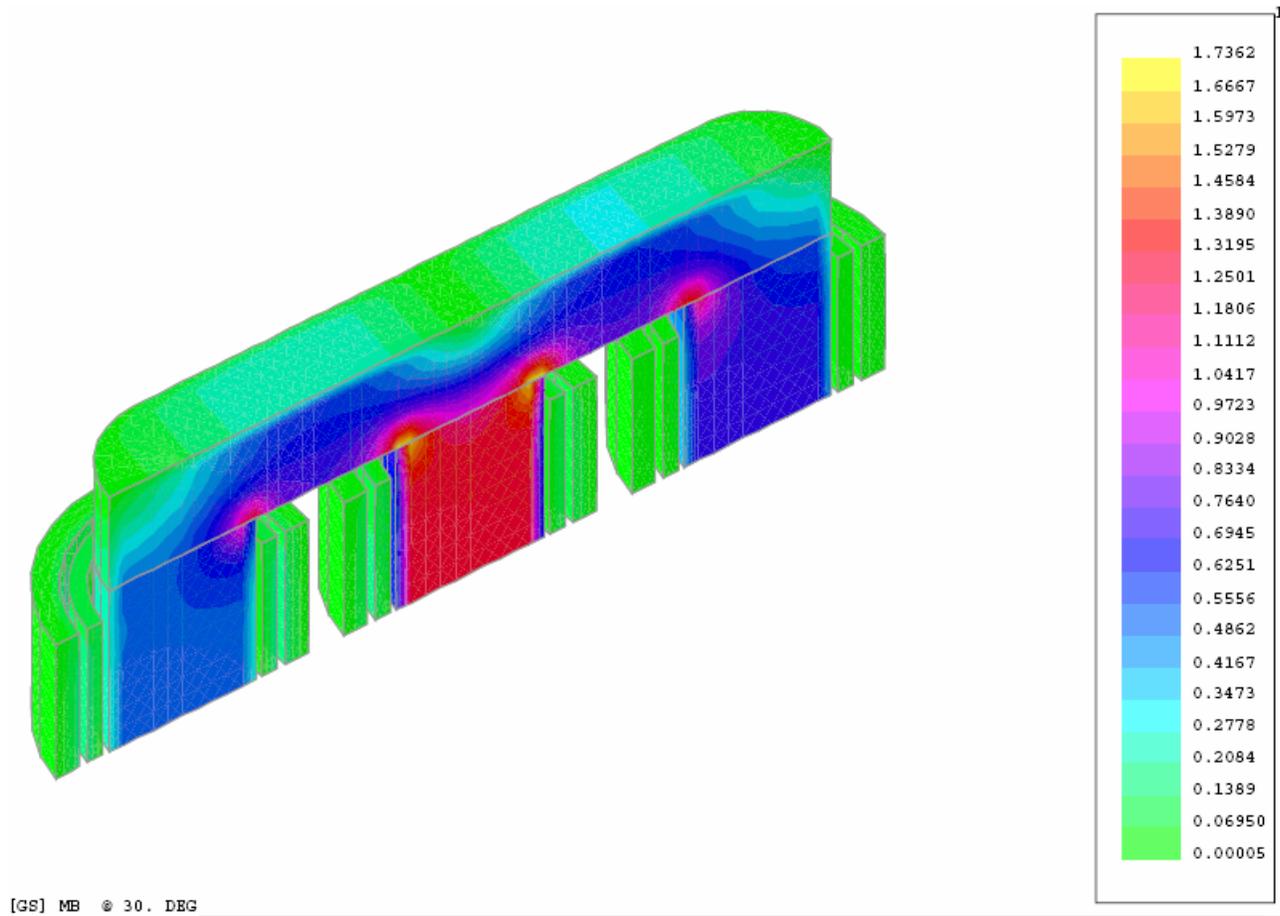


Fig. 6.15. Distribución del campo magnético a plena carga $\omega t=30^\circ$.

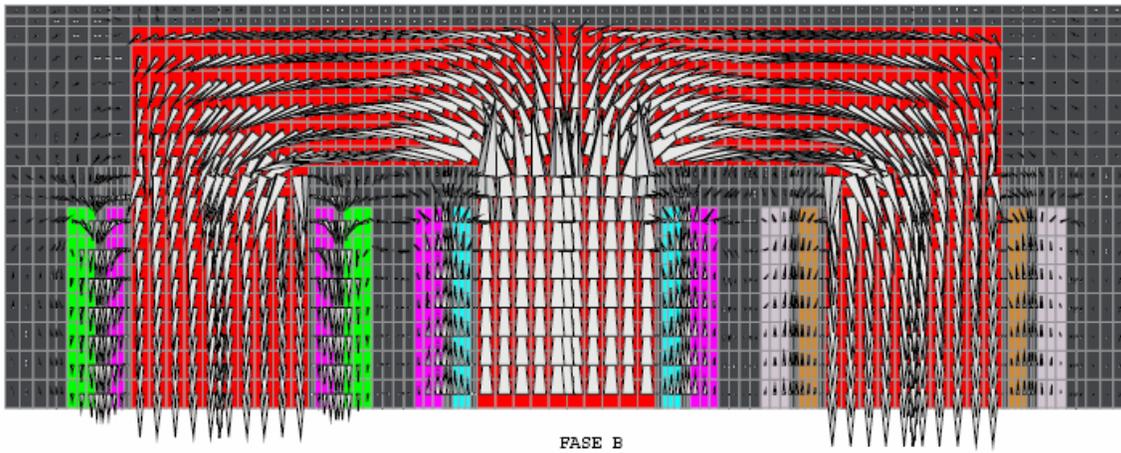
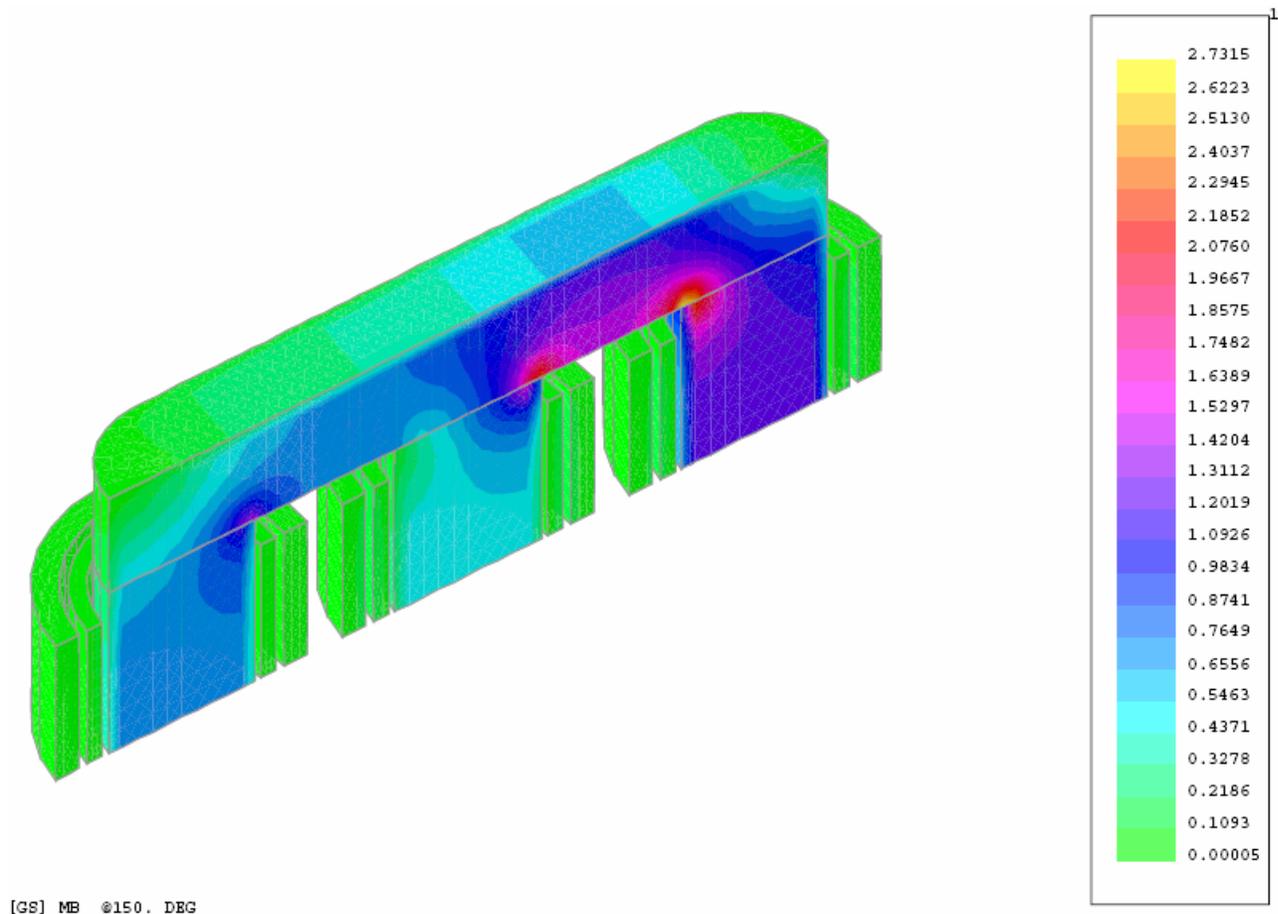


Fig. 6.16. Distribución del campo magnético a plena carga $\omega t=150^\circ$.

CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se ha estudiado el cálculo de pérdidas de potencia en tanques y partes estructurales de transformadores, usando técnicas numéricas modernas para la solución de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno electromagnético de baja frecuencia de los transformadores de distribución. En el Capítulo III se presentó la deducción formal de estas ecuaciones a partir de la Ley de Faraday, la Ley de Ampere y la Ley de Gauss para campos magnéticos. Dado que las corrientes de desplazamiento son muy pequeñas a frecuencias pequeñas (50 ó 60 Hz), se puede asumir sin pérdida de precisión que la densidad de corriente es solenoidal, esto es su divergencia es cero. De esta manera se estableció la Ecuación de Difusión, la cual es una ecuación diferencial en derivadas parciales a la que se le deben especificar condiciones de frontera para garantizar una solución única. En el proceso de establecer condiciones para obtener soluciones únicas fue necesario definir la norma de un campo vectorial. Los potenciales magnético escalares y vectorial son las principales variables para resolver el problema de baja frecuencia. Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno electromagnético se escribieron en el dominio de la frecuencia para simplificar los cálculos. De esta manera sólo se tiene que resolver un sistema de ecuaciones simultáneas por cada simulación. El manejo de la solución es simple ya que sólo involucra números complejos.

La obtención de soluciones analíticas se vuelve impráctica debido a la complejidad de la geometría del transformador. Por tal razón es necesario recurrir a técnicas numéricas como es el Método del Elemento Finito (MEF). La aplicación del MEF representa una herramienta muy útil para el modelado de máquinas eléctricas, ya que permite realizar modelos complejos, así como utilizar sistemáticamente condiciones de frontera especiales tales como las involucradas por las impedancias de superficie. En este trabajo se utilizó un programa de elementos finitos comercial que implementa las formulaciones vectoriales y escalares presentadas en este trabajo. El programa cuenta con generador semi-automático con el que fue posible crear una malla en tres dimensiones. Todas las simulaciones se realizaron con esta malla, la cual contiene suficientes elementos y nodos para obtener soluciones consistentes. Esta afirmación se puede hacer ya que se generaron diferentes para ver la convergencia de la solución. La malla que ofreció buena precisión con el mínimo de nodos y elementos fue la que se escogió. Las simulaciones del transformador de potencia se realizaron para condiciones de plena carga, cortocircuito y circuito abierto. Estos ensayos permitieron caracterizar al transformador, sin tener que realizar las pruebas físicamente. Esto claramente

representa una ventaja ya que se pueden realizar diseños sin recurrir a simplificaciones excesivas como las que se utilizan con circuitos equivalentes (magnéticos y eléctricos). La simulación tridimensional de cortocircuito permitió determinar las pérdidas de potencia en el tanque y los herrajes que sujetan al núcleo del transformador (conocidas como pérdidas *stray*). Esta determinación se dificulta experimentalmente ya que se utilizan métodos indirectos que recurren a la medición de la elevación de temperaturas. Estas técnicas son poco confiables.

El modelo de elementos finitos permitió acoplar circuitos eléctricos externos; la introducción de la corriente se realizó mediante fuentes de voltaje senoidales de amplitud constante. Las pérdidas en los devanados del transformador consideran únicamente las pérdidas por corriente uniforme, esto es se asumió que los devanados son filamentosos. De esta forma sólo hay que conectar resistencias externas a las bobinas que se consideran perfectas desde el punto de vista inductivo. Además, para simular estos devanados del transformador se aplicó una técnica en la que la Ley de Biot Savart se usa primero para determinar el campo magnético asumiendo que no existe material magnético o conductor alguno (cero conductividad y permeabilidad igual a la del vacío). Una vez que se obtiene este campo se utiliza como fuente para determinar el campo en presencia del tanque, herrajes y núcleo.

En partes estructurales sujetas a variaciones de campo magnético y en donde circulan corrientes de remolino, como son el tanque y los herrajes, se incorporó una solución semi-analítica en forma de condición de frontera para evitar el mallado de elementos finitos de estas regiones. A esta condición de frontera se le conoce como impedancia de superficie. La incorporación de esta técnica permitió un gran ahorro en tiempo de cómputo ya que las mallas que se requieren para simular el efecto piel deben ser muy densas. En este particular es conveniente mencionar que el tiempo de solución requerido para resolver un sistema complejo de ecuaciones simultáneas no crece proporcionalmente con el número de incógnitas.

El modelo de elementos finitos, además de proporcionar las distribuciones de campo magnético y de las pérdidas en el transformador, también resulta útil para determinar las corrientes y los voltajes inducidos en los devanados. Los resultados son consistentes bajo la siguiente argumentación:

- a) En la simulación en vacío, los voltajes obtenidos en los devanados de alto voltaje son proporcionales a los de bajo voltaje conforme a la relación de transformación y la corriente se encuentra defasada aproximadamente 90° con respecto al voltaje.
- b) En cortocircuito, las corrientes siguen fielmente la relación de transformación y coinciden además con las corrientes nominales del transformador al aplicar un voltaje igual al voltaje de impedancia. El balance de potencia durante la prueba; esto es, la potencia que suministra la fuente trifásica es consumida, como es de esperarse, por las resistencias de los

devanados y los conductores masivos en las partes estructurales (pérdidas stray).

- c) Los resultados obtenidos de las pérdidas stray son aproximadamente el 2% de la potencia consumida durante la prueba de cortocircuito, dicho porcentaje se encuentra dentro de lo esperado para este tipo de transformador de potencia
- d) De la simulación del transformador, cuando éste opera a plena carga, se puede concluir que los resultados son congruentes, ya que las corrientes y voltajes cumplen con la relación de transformación.

REFERENCIAS

- [1] S. V. Kulkarni and S. A. Khaparde, *Transformer Engineering: Design and Practice*. Marcel Dekker, Inc. Newyork, May-2004
- [2] A.E. Fitzgerald, C. Kingsley and S.D: Umans, *Electric machinery*, Fifth Edition, McGraw Hill, 1990.
- [3] P.P. Silvester and R.L. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers*, Cambridge University Press, 3rd edition, 1996.
- [4] S.R.H. Hoole, *Computer-aided analysis and design of electromagnetic devices*, Elsevier, 1989.
- [5] A.B.J. Reece and T.W. Preston, *Finite Element Method in Electrical Power Engineering*. Oxford University Press, 2000
- [6] K.J. Binns, P.J. Lawrenson and C.W. Trowbridge, *The analytical and numerical solution of electric and magnetic fields*, John Wiley & Sons, 1992.
- [7] N. Ida and J.P.A. Bastos, *Electromagnetics and calculation of fields*, Springer Verlag, 1992
- [8] J. C. Olivares, R. Escarela-Perez, S.V. Kulkarni, F. de León and M. A. Venegas-Vega, "2D Finite-Element Determination of Tank Wall Losses in Pad-Mounted Transformers", *International Journal of Electric Power Systems Research (Elsevier)*, Vol. 71, No. 2, pp. 179-185, 2004.
- [9] M. A. Venegas Vega, "Determinación de Pérdidas en Tanques de Transformadores de Distribución Producidas por las Corrientes de los Conductores de Bajo Voltaje utilizando el Método de Elemento Finito", Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma Metropolitana, 2003.
- [10] J. C. Olivares, R. Escarela-Perez, S.V. Kulkarni, F. de León and M. A. Venegas-Vega, "2D Finite-Element Determination of Tank Wall Losses in Pad-Mounted Transformers", *International Journal of Electric Power Systems Research (Elsevier)*, Vol. 71, No. 2, pp. 179-185, 2004.
- [11] Escarela-Perez, J C. Olivares Galván and M. A. Venegas Vega, "Numerical Determination of Tank Losses in Distribution Transformers", 16th International Conference on Electrical Machines, Cracow, Poland, 5-8 September 2004, Conference Proceedings on CD-ROM: Paper 344, Session PS10.
- [12] A. Królewski, E. Napieralska, M. Pietruszka, T. Niewierowicz: *The interactive and stereo visua-lisation of electromagnetic fields in transformers*. Proc. IEEE Conf. on Power and Industrial Applications, pp. 178-182, Mexico City 2001.
- [13] E. Napieralska-Juszczak, A. Krolewiak, M. Pietruszka, P. Napieralski, T. Niewierowicz, L. Kawecki: *3D Electromagnetic Field Visualization Methods* Decimonovena Reunión de Verano de Potencia (IEEE sección México), RVP 2006 (EDU-10), 9 al 17 de julio de 2006.
- [14] IEEE Standard Test Code for Liquid-Immersed Distribution, Power, and Regulating Transformers *IEEE Std C57.12.90-1999*.
- [15] M. V. K. Chari, A. Honrad, M. A. Palmo and J. D' Angelo, "Three Dimensional Vector Potential Analysis for Machine Field Problems," *IEEE Transactions on Magnetic*, Vol. MAG 18, Mar 1982, pages: 492-497.

- [16] W. Renhart, H. Stoenner and K. Preis, "Calculation of 3D Eddy Currents Problems By Finite Element Methods using either an Electric or Magnetic Vector Potential," *IEEE Transactions on Magnetic*, Vol. 24, Jan 1988, pages: 122-125.
- [17] D. Rodger and J. F. Eastham, "A Formulation for Low Frequency Eddy Current Solution" *IEEE Transactions on Magnetic*, Vol. MAG-19, Nov 1983, pages: 2443-2446.
- [18] C. R. I. Emson and Simkin, "An optimal method for 3-D eddy currents," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. MAG 19, pp. 2450-2452, Nov 1983.
- [19] A. Kameari, "Three dimensional eddy currents using finite element method with A-V in conductor y Ω in vacuum," *IEEE Transactions on Magnetic*, Vol.24, Jan 1988, pages: 118-121.
- [20] D. Rodger and J. F. Eastham, "Multiply connected regions in the A- ψ three dimensional eddy current formulation" *Proc, Inst. Elec. Eng.*, Vol. 134, Jan 1987, pages: 58-66.
- [21] P. J. Leonard and D. Rodger, "Finite element scheme for transient 3D eddy currents," *IEEE Transactions on Magnetic*, Vol.24, Jan 1988, pages: 90-93.
- [22] Bíró, O. and Preis, K., "On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 25, pp. 3145-59, 1989
- [23] M. A. Venegas Vega, J. C. Olivares Galván, R. Escarela Pérez y B. Vázquez González, "Evaluación de pérdidas generadas por las corrientes de remolino en transformadores de distribución utilizando el método del elemento finito", Decimoséptima Reunión de Verano de Potencia, (IEEE sección México), RVP-AI 2004 (TRO-02), 11 al 17 de julio de 2004
- [24] M.A. Venegas Vega, O. Hernández Anaya, J.C. Olivares y R. Escarela Pérez, "Construcción de un Modelo Tridimensional de Elementos Finitos para Obtener Pérdidas debidas a las Corrientes de Remolino en la Pared del Tanque de Transformadores de Distribución", Decimosexta Reunión de Verano de Potencia, (IEEE sección México), RVP-AI 2003 (TRO-16), 6 al 12 de julio de 2003.
- [25] J. C. Olivares, J. Cañedo, P. Moreno, J. Driesen and R. Escarela-Perez, "Experimental Study to Reduce the Distribution-Transformers Stray Losses Using Electromagnetic Shields", *Journal of Electric Power Systems Research (Elsevier)*, 63 (2002) 1-7.
- [26] Guerin C., Meunier G., "Surface Impedance for 3D Non-linear Eddy Current Problems – Application to Loss Computation in Transformers", *IEEE Trans. of Magnetics*, Vol. 32. No.3, pp. 808-811, May 1996.
- [27] Guérin C., Tanneau G., Meunier G., "3D Eddy Current Losses Calculation in Transformer Tanks Using the Finite Element Method" *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 29, pp. 1419-1422, March 1993.
- [28] S. Holland, G. O'Connell and L. Haydock, "Surface Impedance for 3D Non-linear Eddy Current Problems Application to Loss in Transformer" *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 32, pp. 808-811, May 1996.
- [29] M.A. Venegas Vega, R. Escarela Pérez, T. Niewierowicz Swiecicka y E. Campero Littlewood, "Cálculo de Pérdidas debido a Flujos Dispersos en Transformadores de Potencia usando el Método del Elemento Finito.", Decimonovena Reunión de Verano de Potencia, (IEEE sección México), RVP-AI 2006 (TRO-16, P152), 9 al 17 de julio de 2006

- [30] Stephen J. Chapman, *Máquinas Eléctricas* (2° edición), McGraw-Hill, 1993.
- [31] Reitz J.R., Milford F.J., y Christy R.W., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Ed. Addison-Wesley, 1996
- [32] M. N. O. Sadiku *Elementos de Electromagnetismo* (3° ed.) Oxford University Press, 2003
- [33] O. Biro, K. Preis, W. Renhart, G. Vrisk and K.R. Richter, Computation of 3D current driven skin effect problems using a current vector potential, *IEEE Transactions on Magnetics*, 29, 2, pp. 1325-1328, 1993
- [34] Rodger P.J. Leonard H.C. Lai and P.C. Coles, "Finite Element For Modelling of Thin Skin Depth Problems using Magnetic Vector Potential," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 33, No 2, pp. 1299-1301, March 1997.
- [35] D. Rodger P.J. Leonard H.C. Lai and R.J. Hill Nottingham. "Surface Element For Modelling Eddy Currents in High Permeability Materials," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 27, No 6, pp. 4995-4997, Nov 1991.
- [36] Biró, O. "Edge element formulations of eddy-current problems", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 169, pp. 391-405, Feb. 1999.
- [37] Biró, O. "Edge element formulations of eddy-current problems", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 169, pp. 391-405, Feb. 1999.
- [38] R. D. Pillsbury, "A three dimensional eddy current using two potential: the magnetic vector potential and total magnetic scalar potential," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. MAG 19, pp. 2284-2287, Nov 1983.
- [39] C. W. Trowbridge, "Low frequency electromagnetic field computation in three dimension," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 52, pp. 653-674, 1985.
- [40] P.J Leonard and D. Rodger, "Voltage Forced Coils for 3D Finite-Element Electromagnetic Models," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 24, No 6, pp. 2579-2581, Nov 1988.
- [41] MEGA V6.27 USER MANUAL Applied Electromagnetic Research Centre Bath University, 2000

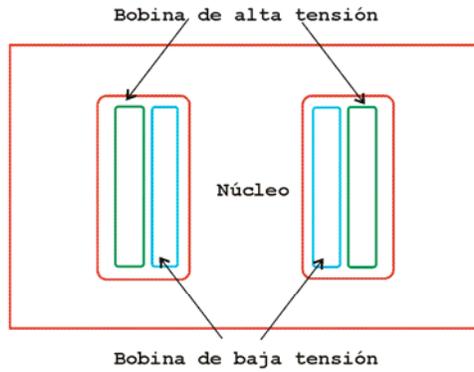
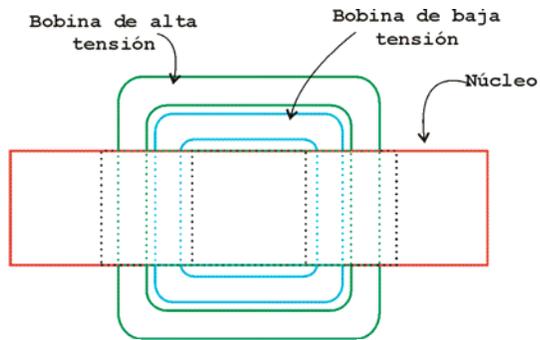
EL TRANSFORMADOR

A.1 Conceptos básicos

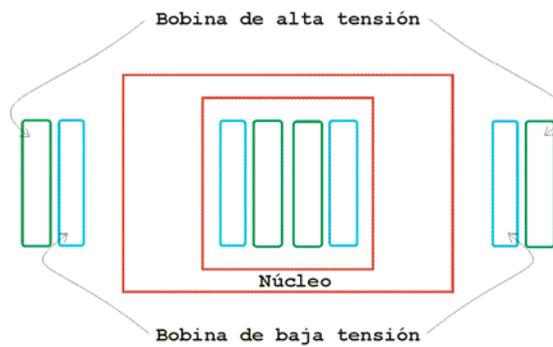
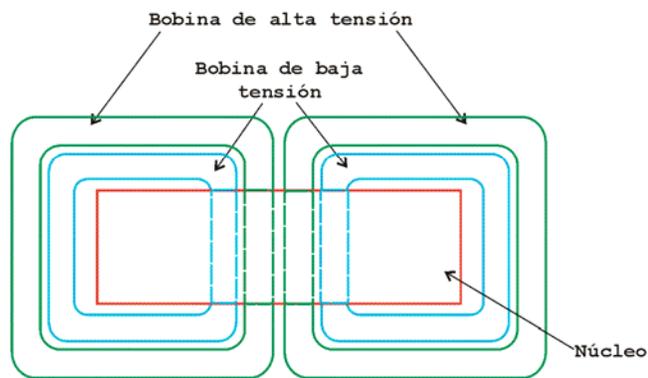
Un transformador consiste esencialmente en dos o más devanados interrelacionados mediante flujo magnético mutuo. Si uno de esos devanados, el primario, se conecta a una fuente de voltaje alterno se produce un flujo alterno cuya amplitud dependerá del voltaje primario y del número de vueltas. El flujo mutuo encadenará al otro devanado, el secundario, e inducirá un voltaje en él, cuyo valor dependerá del número de vueltas de ese devanado. Si se da la correcta proporción del número de vueltas del primario al del secundario, se puede obtener casi cualquier relación de transformación. Así, es posible que los generadores, líneas de transmisión, redes de distribución y la gran variedad de cargas, se puedan operar en las tensiones más apropiadas [2].

La acción del transformador demanda la presencia de flujo mutuo, que es variable en el tiempo y que enlaza los dos devanados. Se obtiene la transformación si se usa un núcleo de aire, pero se obtiene mayor eficiencia con un núcleo de hierro u otro material ferromagnético, porque la mayor parte del flujo se confina a un camino definido que encadena los dos devanados y que tiene una permeabilidad mucho mayor a la del aire. A este tipo de transformador se le llama en general transformador de núcleo de hierro.

Por lo general, los núcleos magnéticos se construyen a través de pilas de láminas delgadas para reducir las pérdidas originadas por las corrientes de remolino. En la figura A.1 se muestran dos tipos de construcción del núcleo, cada uno con sus formas típicas de bobinas. La figura A.1a muestra el tipo acorazado en planta y en elevación y la figura A.1b ilustra la construcción del tipo núcleo. En el tipo núcleo las bobinas se devanan alrededor de dos piernas o (columnas) del núcleo rectangular. En el tipo acorazado las bobinas se devanan alrededor de la pierna (o columna) central de un núcleo con tres piernas.



(a)



(b)

Fig. A.1 Tipos de construcción de transformadores a) Tipo acorazado. b) Tipo núcleo.

La mayor parte del flujo está confinado en el núcleo y por lo tanto enlaza a ambos devanados. Aunque el flujo de dispersión, que es el que encadena a un devanado sin encadenar al otro [1], es una fracción pequeña del flujo total, tiene un efecto importante sobre el comportamiento del transformador. Se reduce la dispersión subdividiendo los devanados en dos secciones colocadas tan cerca entre sí como sea posible [2]. En la construcción del transformador tipo núcleo, cada devanado consiste en dos secciones, una en cada pierna del núcleo, y los devanados primario y secundario son bobinas concéntricas.

En la construcción del transformador tipo acorazado [1] se pueden emplear variaciones del arreglo de devanados concéntricos, o bien los devanados pueden consistir en un determinado número de donas delgadas del primario y secundario alternadas y armadas en una pila.

A.2 Transformador ideal

El transformador ideal es el punto inicial para comenzar el estudio de las características de desempeño del transformador real. Después de todo, el circuito equivalente del transformador real se construye alrededor del núcleo del transformador ideal. El transformador ideal, eléctrica y magnéticamente, se caracteriza por tres postulados de funcionamiento [1]:

1. Las pérdidas son despreciables esto es, la resistencia de los devanados y la del núcleo se desprecian.
2. Sólo existe el acoplamiento magnético entre los pares de bobinas (no existe flujo disperso).
3. Se requiere una corriente despreciable para establecer un flujo mutuo (se considera la permeabilidad magnética del núcleo infinita).

A.2.1 Diagramas de Circuito Eléctrico Equivalente.

El transformador monofásico ideal de dos bobinas se muestra con el arreglo físico del circuito y con su representación esquemática en la figura A.2. El arreglo físico de la figura A.2a tiene todas las variables indicadas en el dominio del tiempo, mientras que el esquema de la figura A.2b indica las variables en el dominio de la frecuencia. Las variables pueden intercambiarse, ya que ambas figuras entregan información idéntica. Las tensiones $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son las tensiones a través de las terminales de las bobinas. El flujo mutuo $\phi_m(t)$ variante con el tiempo acopla perfectamente las bobinas 1 y 2 e induce tensiones $e_1(t)$ y $e_2(t)$ en las bobinas. Para el transformador ideal, con bobinas sin pérdidas y sin flujo de fuga, se tiene que $v_1(t) = e_1(t)$ y $v_2(t) = e_2(t)$ Si se permite que el flujo mutuo $\phi_m(t)$ de la figura A.2a aumente, puede verificarse por la ley de Lenz [6] que $e_1(t)$ y $e_2(t)$ tienen simultáneamente valores positivos con la polaridad indicada en el diagrama del circuito A.2a. Inversamente, las polaridades de las tensiones son negativas para $\phi_m(t)$ decreciente. De esta manera, se concluye que las tensiones $e_1(t)$ y $e_2(t)$ se encuentran en fase.

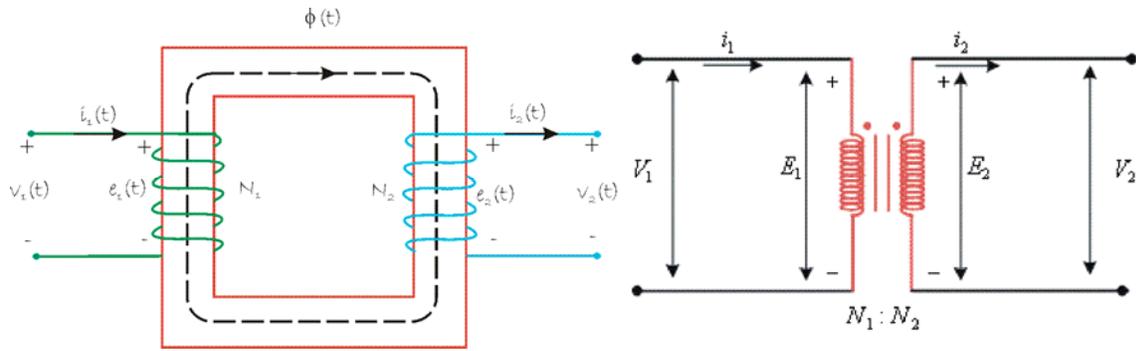


Fig. A.2 Transformador ideal. a) Arreglo físico. b) Representación en circuito equivalente

A.2.2 Relaciones de tensión y corriente

Las tensiones en las bobinas de la figura A.2a pueden determinarse por la ley de Faraday [7] utilizando el flujo mutuo $\phi_m(t)$ que acopla perfectamente a ambas bobinas:

$$v_1(t) = e_1(t) = N_1 \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad (\text{A.1})$$

$$v_2(t) = e_2(t) = N_2 \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad (\text{A.2})$$

donde N_1 y N_2 son el número de vueltas de cada bobina.

Dividiendo la ecuación (A.1) por la (A.2) se tiene que:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} = a \quad (\text{A.3})$$

Así, puede decirse que las tensiones en las bobinas del transformador ideal varían directamente con la razón de vueltas de las bobinas sin importar la naturaleza del flujo variable en el tiempo $\phi_m(t)$.

Para el caso de operación en estado estable senoidal, el flujo de acoplamiento mutuo puede expresarse como $\phi_m(t) = \Phi_m \text{sen } \omega t$. Las tensiones resultantes en las bobinas se obtienen a partir de las ecuaciones (A.1) y (A.2) como:

$$v_1(t) = N_1 \frac{d(\Phi_m \text{sen } \omega t)}{dt} = \omega N_1 \Phi_m \text{cos } \omega t \quad (\text{A.4})$$

$$v_2(t) = N_2 \frac{d(\Phi_m \text{sen } \omega t)}{dt} = \omega N_2 \Phi_m \text{cos } \omega t \quad (\text{A.5})$$

Transformando las ecuaciones (A.4) y (A.5) a fasores con valores rms, se tiene que:

$$\tilde{V}_1 = \tilde{E}_1 = \frac{\omega N_1 \Phi_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 4.44 N_1 \Phi_m f \angle 0^\circ \quad (\text{A.6})$$

$$\tilde{V}_2 = \tilde{E}_2 = \frac{\omega N_2 \Phi_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 4.44 N_2 \Phi_m f \angle 0^\circ \quad (\text{A.7})$$

donde se ha utilizado $\omega=2\pi f$. Debe tenerse en cuenta que aunque las ecuaciones (A.6) y (A.7) dan valores rms para la tensión, Φ_m es el valor máximo de flujo mutuo. La razón de la ecuación (A.6) a la (A.7) muestra que las tensiones en terminales en el dominio de la frecuencia de la figura A.2b también varían en proporción directa a la razón de las vueltas de las bobinas:

$$\frac{\tilde{V}_1}{\tilde{V}_2} = \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{A.8})$$

El circuito magnético de la figura A.2a puede modelarse con el circuito análogo de la figura A.2b.

El tercer postulado de funcionamiento del transformador ideal puede cumplirse sólo si la intensidad de campo magnético \mathbf{H} dentro del núcleo es cero. Por lo tanto, el material del núcleo es infinitamente permeable y la reluctancia del núcleo debe ser cero.

La suma de las fuerzas magnetomotrices (fmms) de la figura A.3 resulta en

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \phi_m \mathcal{R}_c = 0 \quad (\text{A.9})$$

De la ecuación (A.9) se observa que para el transformador ideal las corrientes de entrada y salida varían inversamente a la razón del número de vueltas:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a} \quad (\text{A.10})$$

Ya que la razón de las funciones del tiempo de la corriente en la ecuación (A.10) es igual a una constante con valor positivo, puede concluirse que i_1 y i_2 son funciones idénticas de tiempo, con relaciones idénticas de tiempo y de fase, que varían sólo en magnitud. En consecuencia, la ecuación (A.10) también es válida en el dominio de la frecuencia obteniéndose:

$$\frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a} \quad (\text{A.11})$$

Las observaciones sobre las tensiones y las corrientes permiten establecer las siguientes reglas con respecto a las terminales con punto en la figura A.2b [28]:

1. Las tensiones que van de terminales con punto a terminales sin punto están en fase.
2. La corriente que entra a una terminal con punto está en fase con la corriente que sale de la otra terminal con punto.
3. Ambos puntos pueden moverse a la terminal opuesta sin invalidar las reglas anteriores.

A.2.3 Relaciones de potencia e impedancia

El recíproco de la ecuación (A.10) puede igualarse a la ecuación (A.3) para obtener la conclusión de que las potencias instantáneas de entrada y salida son idénticas para el transformador ideal, corroborando el primer postulado para el transformador ideal:

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad (\text{A.12})$$

Las implicaciones de la ecuación (A.12) son muchas y vale la pena conocerlas explícitamente. Si las tensiones y las corrientes de la ecuación (A.12) son funciones de tiempo, entonces los valores promedio de las potencias de entrada y salida son iguales. Las ecuaciones (A.8) y (A.11) en el dominio de la frecuencia pueden utilizarse para derivar una ecuación similar a (A.12):

$$\tilde{V}_1 \tilde{I}_1 = \tilde{V}_2 \tilde{I}_2 \quad (\text{A.13})$$

Es aparente que las potencias complejas que fluyen hacia adentro y hacia afuera del transformador ideal son idénticas.

Habiendo establecido que las tensiones y las corrientes sufren una transformación en magnitud en el transformador, es lógico explorar la naturaleza de la transformación de la impedancia en el transformador ideal bajo operación en estado estable senoidal. Sea una impedancia Z_2 conectada a través de las terminales de salida del transformador ideal de la figura A.2b. Entonces, utilizando las ecuaciones (A.8) y (A.11), la impedancia vista desde las terminales de entrada está dada por:

$$Z_1 = \frac{\tilde{V}_1}{\tilde{I}_1} = \frac{a\tilde{V}_2}{\tilde{I}_2/a} = a^2 \frac{\tilde{V}_2}{\tilde{I}_2} = a^2 Z_2 \quad (\text{A.14})$$

De esta manera, una impedancia en un lado del transformador ideal aparenta tener un valor que es ajustado en proporción directa al cuadrado de la razón de vueltas en el otro lado del transformador. La ecuación (A.14) es bastante útil cuando, para propósito de análisis, se refieren cargas o impedancias de línea a un sólo lado del transformador.

A.3 El transformador real

No existe un material ferromagnético sin pérdidas. El alambre magneto real con resistencia despreciable para la fabricación de bobinas no es una realidad. El transformador ideal no puede ser alcanzado, aunque sí aproximado. Las pequeñas desviaciones con la imperfección, en casi todas las aplicaciones, tienen suficiente impacto en el desempeño del transformador como para merecer un análisis más preciso.

Los detalles principales que se deben tener en cuenta para la construcción de un modelo de un transformador real son los siguientes:

1. Pérdidas en el cobre (I^2R): Las pérdidas en el cobre corresponden a la energía que es disipada por las resistencias de las bobinas primaria y secundaria del transformador. Dichas pérdidas son proporcionales al cuadrado de la corriente que circula por dichas bobinas.
2. Pérdidas por corrientes parásitas (remolino): Las pérdidas por corrientes parásitas son pérdidas producidas por la resistencia eléctrica del núcleo del transformador. Éstas son proporcionales a la frecuencia y al cuadrado del voltaje aplicado al transformador [1].
3. Pérdidas por histéresis: Las pérdidas por histéresis están asociadas con los reacomodamientos de los dominios magnéticos en el núcleo cada medio ciclo. Ellos son una función compleja, no lineal, del voltaje aplicado al transformador.
4. Flujo de dispersión: Los flujos que salen del núcleo y pasan por sólo una de las bobinas del transformador se denominan flujos de dispersión.

Es posible construir un circuito equivalente que tenga en cuenta las imperfecciones principales de los transformadores reales. Considerando las resistencias e inductancias de los devanados primarios y secundarios, además de los efectos que tiene el núcleo sobre los voltajes y corrientes del transformador, en la figura A.3 se muestra el circuito equivalente para un transformador que opera en estado estable [1].

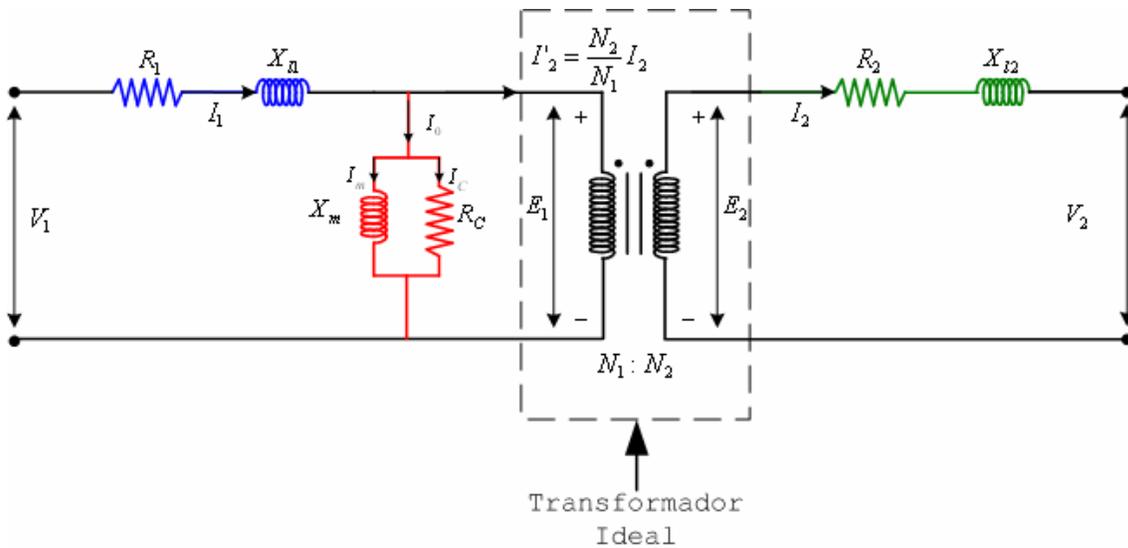


Fig. A.3 Circuito equivalente del Transformador Real.

Para poder trabajar con el circuito de la figura A.3, es conveniente referir todos los parámetros (impedancias) del transformador a un mismo nivel de tensión. Esto se puede hacer con respecto al primario o bien con respecto al secundario. En el circuito de la figura A.4 se muestra el circuito equivalente de un transformador real referido al lado primario del mismo. Es necesario observar que la impedancia del secundario fue multiplicada por la razón de transformación al cuadrado.

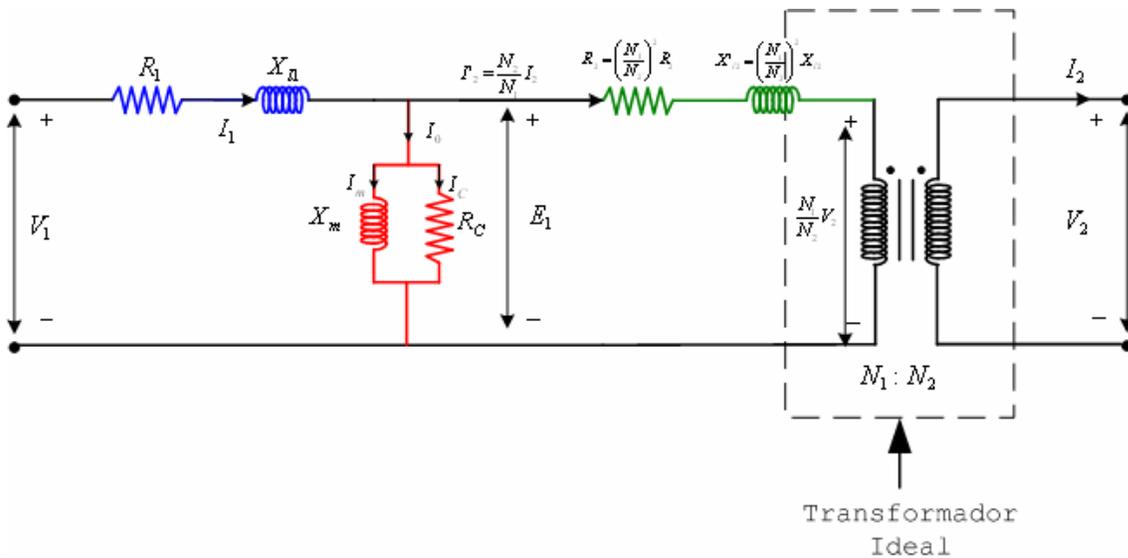


Fig.A.4 Circuito equivalente del Transformador Real referido al lado primario.

A.4 Regulación de voltaje y eficiencia de un transformador

Debido a que el transformador real tiene impedancias en serie en su interior, su tensión de salida varía con la carga, aunque, la tensión de alimentación se

mantenga constante. Para comparar el desempeño de los transformadores se acostumbra a definir una cantidad llamada regulación de voltaje. La regulación de voltaje a plena carga es una cantidad que compara el voltaje de salida del transformador en vacío con el voltaje de salida a plena carga. Esto se define por la siguiente ecuación [2]:

$$regulación = \frac{V_{S,sc} - V_{S,pc}}{V_{S,pc}} \times 100 \quad \% \quad (A.15)$$

Generalmente se considera conveniente tener una regulación de tensión tan pequeña como sea posible.

En una compañía de energía eléctrica, las pérdidas de energía en un transformador son ingresos perdidos. Comúnmente, la energía se procesa a través de cuatro o más transformadores antes de llegar al punto de utilización final. Por lo tanto, la eficiencia del transformador es importante.

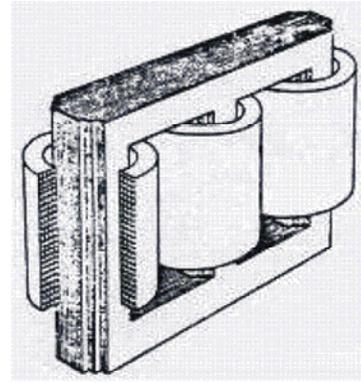
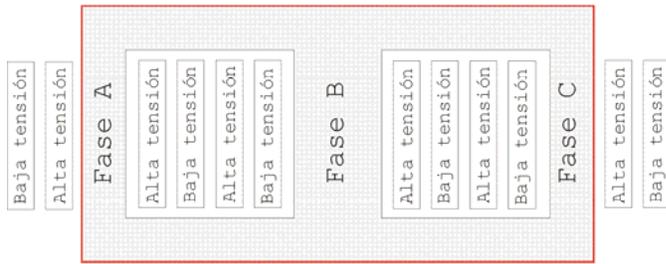
Los transformadores también se comparan y valoran de acuerdo con su eficiencia. La eficiencia o rendimiento de un artefacto se puede conocer por medio de la siguiente ecuación [2]:

$$\eta = \frac{P_{SAL}}{P_{ENT}} \times 100\% \quad = \quad \eta = \frac{P_{SAL}}{P_{SAL} + P_{\text{Pérdidas}}} \times 100\% \quad (A.16)$$

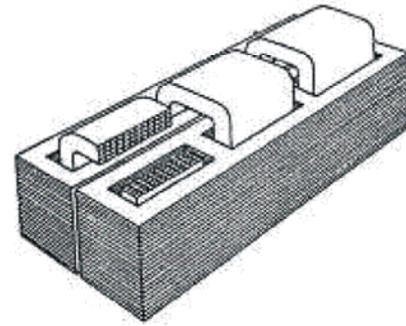
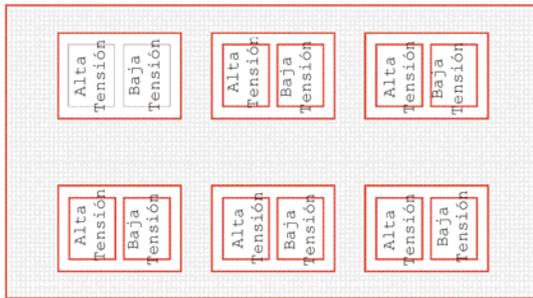
Esta ecuación se aplica a transformadores, así como a motores y generadores.

A.6 Transformadores trifásicos.

La mayoría de las redes de distribución son trifásicas y también un buen número de usuarios de tipo comercial e industrial hacen uso de sistemas de alimentación trifásicos, esto hace que sea necesario considerar la importancia que tienen los sistemas trifásicos en las instalaciones eléctricas y en consecuencia los transformadores trifásicos en estas. La energía de un sistema trifásico se puede transformar, ya sea por medio de tres transformadores monofásicos (formando un banco trifásico) o bien mediante el uso de un transformador trifásico. Por razones de tipo económico, de espacio en las instalaciones y confiabilidad en los equipos, se puede decir, que en general, es preferida la solución del uso de transformadores trifásicos en las instalaciones eléctricas que requieren de este tipo de alimentación. Un transformador trifásico con núcleo magnético común también puede ser del tipo núcleo o acorazado como se muestra en las figuras A.5a y A.5b.[1-2,29]



(a)



(b)

Fig. A.5 Disposición de núcleos y bobinas de un transformador trifásico. (a) Construcción tipo núcleo (b) Construcción tipo acorazado